Fachbereich Mathematik **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier

Klausur Differentialgleichungen II

07. September 2021

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.
Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1: [6 Punkte]

Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t \,-\, 4t^3\, u_x \,&=\, -u\,, \qquad && x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \frac{\sin(x)}{1+x^2} && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Lösung: Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man:

$\frac{dx}{dt} \,=\, -4t^3 \Longrightarrow dx = \,-4t^3 dt \Longrightarrow x = -t^4 + C_1$ **[1 Punkt]**

$\frac{du}{dt} \,=\, -u \Longrightarrow \frac{du}{u} \,=\, -dt \Longrightarrow \ln(|u|) \,=\, -t + \tilde{C}_2 \Longrightarrow u = \pm e^{-t+\tilde{C}_2} \,=\, C_2 e^{-t}$ **[1 Punkt]**

Mit $C_1 = x + +t^4$ und $C_2 = ue^t$ machen wir den Ansatz

$C_2 = f(C_1)$ **[1 Punkt]**

und erhalten

$ue^t \,=\, f(x+t^4)$

und damit die allgemeine Lösung: $u(x,t) = e^{-t} f(x+t^4)$. **[1 Punkt]**

Die Anfangsbedingung verlangt:

$u(x,0) \,=\, e^{-0} f(x+0^4) \,=\, f(x) \overset{!}{=} \dfrac{\sin(x)}{1+x^2}\,.$ **[1 Punkt]**

$u(x,t) \,=\, e^{-t}\, \dfrac{\sin(x+t^4)}{1+(x+t^4)^2}.$ **[1 Punkt]**

Aufgabe 2: [7 Punkte]

Bestimmen Sie Entropielösungen der Differentialgleichung

$$u_t + \left(f(u)\right)_x = 0$$

mit der Flussfunktion $f(u) = \frac{(u-2)^4}{2}$ und den Anfangsbedingungen

a) $u(x,0) = \begin{cases} 2 & x \le 0, \\ 1 & 0 < x, \end{cases}$ bzw. **b)** $u(x,0) = \begin{cases} 1 & x \le 0, \\ 2 & 0 < x. \end{cases}$

Hinweis: Gefragt sind nur Lösungen für die vorgegebenen Anfangswerte. Sie brauchen keine Lösungen für allgemeine Anfangswerte anzugeben!

Lösung:

Mit den üblichen Bezeichnungen gilt $f(u) = \frac{(u-2)^4}{2}$. **[1 Punkt]**

Auf den Charakteristischen Kurven gilt

$\dot{x}(t) = f'(u) = 2(u-2)^3$ und $\dot{u}(t) = 0$.

Die Charakteristiken sind Geraden mit konstanter Steigung $2(u(x(0),0)-2)^3$.

In Teil a) entsteht daher sofort (also bereits bei $t = 0$) eine Mehrdeutigkeit der Lösung über die Charakteristiken Methode. Es muss mit $u_l = 2$ und $u_r = 1$ eine Stoßfront $s(t)$ eingeführt werden **[1 Punkt]**

mit

$$\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{\frac{(2-2)^4}{2} - \frac{(1-2)^4}{2}}{2-1} = -\tfrac{1}{2} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

eingeführt werden. Man erhält

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l = 2 & x < s(t) = -\frac{t}{2} \\ u_r = 1 & -\frac{t}{2} < x. \quad \textbf{[1 Punkt]} \end{cases}$$

Für Teil b) liefert die Charakteristiken Methode

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x \le x_0 + f'(u_l)t = 0 + 2(1-2)^3 t = -2t\,, \\ ? & -2t \le x \le 0\,, \\ 2 & x \ge x_0 + f'(u_r)t = 0 + 2(2-2)^3 t = 0\,. \end{cases}$$

Es muss also eine Verdünnungswelle eingeführt werden. **[1 Punkt]**

Mit

$f'(u) = 2(u-2)^3 = v \implies g(v) := (f')^{-1}(v) = \left(\frac{v}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + 2$

erhält man die Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & x \leq -2t\,, \\ g(\frac{x}{t}) = \left(\frac{x}{2t}\right)^{\frac{1}{3}} + 2 & -2t \leq x \leq 0 \\ 2 & x \geq 0. \end{cases} \qquad \textbf{[2 Punkte]}$$

Aufgabe 3: [7 Punkte]

a) Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 2u_{xx} &= \frac{1}{2}x\cos(t) && \text{für } x \in (0,2), t > 0, \\ u(x,0) &= 20\sin(2\pi x) + 21\sin(4\pi x) + \frac{x}{2} && \text{für } x \in [0,2], \\ u(0,t) = 0, \quad u(2,t) &= 1 + \sin(t) && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

Überführen Sie die Aufgabe mittels einer geeigneten Homogenisierung der Randdaten in eine Anfangsrandwertaufgabe mit homogenen Randdaten.

b) Lösen Sie die folgende Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned} v_t - 2v_{xx} &= 0 && \text{für } x \in (0,2), t > 0, \\ v(x,0) &= 20\sin(2\pi x) + 21\sin(4\pi x) && \text{für } x \in [0,2], \\ v(0,t) = 0, \quad v(2,t) &= 0 && \text{für } t > 0. \end{aligned}$$

c) Geben Sie die Lösung für die Anfangsrandwertaufgabe aus Teil a) an.

Lösung:

a) Homogenisierung:

$$v(x,t) = u(x,t) - 0 - \frac{x}{2}(1 + \sin(t) - 0) = u(x,t) - \frac{x}{2}(1 + \sin(t))$$

oder

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{2}(1 + \sin(t)). \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Dann gilt:

$$u_t = v_t + \frac{x}{2}\cos(t), \qquad v_{xx} = u_{xx} \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Neue DGL: $\quad v_t + \frac{x}{2}\cos(t) - 2v_{xx} = \frac{1}{2}x\cos(t) \Longleftrightarrow$

$$\boxed{v_t - 2v_{xx} = 0} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$

Anfangswerte:

$$\begin{aligned} v(x,0) &= u(x,0) - \frac{x}{2}(1 + \sin(0)) \\ &= 20\sin(2\pi x) + 21\sin(4\pi x) + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} \Longleftrightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{v(x,0) = 20\sin(2\pi x) + 21\sin(4\pi x)}$$

Randwerte : $\boxed{v(0,t) = v(2,t) = 0}$ **[1 Punkt]**

b) Mit $\omega = \frac{\pi}{2}$ und $c = 2$ gilt:

$$v(x,t) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-c\omega^2 k^2 t}\, \sin(k\omega x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-\frac{k^2\pi^2}{2} t}\, \sin(\frac{k\pi}{2} x)$$

Einsetzen der Anfangswerte ergibt:

$v(x,0) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty}\, a_k \sin(\frac{k\pi}{2} x) \;\overset{!}{=}\; 20 \sin(2\pi x) \;+\; 21 \sin(4\pi x)$

$\Longrightarrow\; a_4 = 20,\; a_8 = 21,\; a_k = 0 \qquad \forall k \notin \{4, 8\}$ **[2 Punkte]**

c) Für die Lösung von a) erhalten wir somit

$$u(x,t) = \; v(x,t) + \; \frac{x}{2}(1 + \sin(t))$$

$$= \; 20\, e^{-\frac{4^2\pi^2}{2} t}\, \sin(\frac{4\pi}{2} x) + 21\, e^{-\frac{8^2\pi^2}{2} t}\, \sin(\frac{8\pi}{2} x) + \; \frac{x}{2}(1 + \sin(t))$$

$$= \; 20\, e^{-8\pi^2 t}\, \sin(2\pi x) + 21\, e^{-32\pi^2 t}\, \sin(4\pi x) + \; \frac{x}{2}(1 + \sin(t)).$$ **[1Punkt]**