Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe:

$$\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= 0 && x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ t > 0,\\
u(x,0) &= \begin{cases} x & x \in [0, \frac{\pi}{4}],\\ \frac{\pi}{2} - x & x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}],\end{cases}\\
u_t(x,0) &= 2\sin(4x) && x \in [0, \frac{\pi}{2}],\\
u(0,t) &= u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 && t > 0.
\end{aligned}$$

b) Gegeben ist die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned}
u_{tt} - 4u_{xx} &= e^{-t}\left(1 - \frac{x}{3}\right) && x \in (0,\ 3),\ t > 0,\\
u(x,0) &= 1 + 2\sin(\pi x) && x \in [0,3],\\
u_t(x,0) &= \frac{x}{3} && x \in [0,3], \qquad (1)\\
u(0,t) &= e^{-t} && t > 0,\\
u(3,t) &= 1 && t > 0.
\end{aligned}$$

für $u = u(x,t)$. Welche Anfangsrandwertaufgabe erhält man nach geeigneter Homogenisierung der Randdaten?

Aufgabe 2:

Gegeben ist das folgende Dirichletproblem

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0, && x, y \in]0, \pi[\,,\\
u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(2x), && x \in [0,\pi]\,,\\
u(x,\pi) &= 0, && x \in [0,\pi]\,,\\
u(0,y) &= 1 - \frac{y}{\pi} + \sin^3(y), && y \in [0,\pi]\,,\\
u(\pi,y) &= 0, && y \in [0,\pi]\,.
\end{aligned}$$

Schreiben Sie das Problem so um, dass Sie jeweils zwei Randwertaufgaben lösen müssen, bei denen die gesuchte Lösung nur auf einer Kante des Rechtecks nicht identisch verschwindet.

Hinweis: Führen Sie eine bilineare Funktion $u_E(x, y) := a + bx + cy + dxy$ *ein, die die Randwerte in den Ecken* $(0, 0)$, $(0, \pi)$, (π, π), $(\pi, 0)$ *interpoliert, und schreiben Sie das Problem um in ein Problem für* $v(x, y) = u(x, y) - u_E(x, y)$.

Für den Fall, dass Sie die neuen Aufgaben lösen wollen: Es gilt $\sin(3y) = 3\sin(y) - 4\sin^3(y)$.

Bearbeitungstermine: 29.06.-02.07.21