Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 6 Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Die Funktion

$$\tilde{u}(x,t) \;=\; \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$$

löst die inhomogene Anfangswertaufgabe

$$\tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} \;=\; h(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) \;=\; \tilde{u}_t(x,0) \;=\; 0\,.$$

Berechnen Sie eine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= -4x, && x\in\mathbb{R},\, t>0 \\ u(x,0) &= 1, && x\in\mathbb{R}, \\ u_t(x,0) &= \cos(x), && x\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

und bestätigen Sie die Lösung durch Einsetzen in die Anfangswertaufgabe.

Hinweis: Man bestimmt eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit homogenen Anfangswerten, löst die homogene Differentialgleichung mit den inhomogenen Anfangswerten und verwendet das Superpositionsprinzip.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie mit Hilfe eines Produktansatzes bzw. mit Hilfe der Fourier–Methode die Lösung der folgenden Anfangsrandwertaufgabe.

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 25u_{xx} && 0<x<2,\ t\in\mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= 1-\sin\left(\frac{x\pi}{4}\right) && 0\le x\le 2\,, \\ u_t(x,0) &= \frac{x}{2} && 0\le x\le 2\,, \\ u(0,t) &= 1, && t>0\,, \\ u(2,t) &= t, && t>0. \end{aligned}$$

Hinweis : Sie können eine der beiden folgenden Formeln verwenden:

$$\sin(ax)\,\sin(bx) \;=\; \frac{1}{2}\,[\cos((a-b)x)-\cos((a+b)x)]$$

$$\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)\int \sin(ax)\,\sin(bx)\,dx \;=\; \frac{a}{b^2}\,\cos(ax)\sin(bx)-\frac{1}{b}\sin(ax)\cos(bx)$$

Aufgabe 3:

a) Zeigen Sie, dass die Fourier–Koeffizienten der ungerade und 2–periodisch fortgesetzten Funktion $g(y) = y^2 - y,\ 0 \leq y \leq 1$, gegeben sind durch

$$a_k = 0\,, \quad \beta_k = \begin{cases} 0 & \text{für k gerade,} \\ -\dfrac{8}{(k\pi)^3} & \text{für k ungerade.} \end{cases}$$

b) Bestimmen Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes und unter Verwendung von a) die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{array}{ll} \Delta u(x,y) = 0 & x \in (0,1),\ y \in (0,1), \\ u(x,0) = 0 & x \in [0,1]\,, \\ u(x,1) = 0 & x \in [0,1]\,, \\ u(0,y) = g(y) = y^2 - y & y \in [0,1]\,, \\ u(1,y) = 0 & y \in [0,1]\,. \end{array}$$

Abgabetermine: 29.06 - 02.07.2021