Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - 4u_{xx} &= 0 \qquad 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= x - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \qquad 0 \le x \le 1 \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \qquad t > 0. \end{aligned}$$

b) Gegeben ist die folgende Anfangsrandwertaufgabe für $u = u(x,t)$:

$$\begin{aligned} &u_t - 2u_{xx} = -2xe^{-2t} + \sin(2\pi x)\,, && x \in (0,\,2),\ t > 0\,, \\ &u(x,0) = 1 + \frac{x}{2} + 3\sin(3\pi x)\,, && x \in [0,2]\,, \\ &u(0,t) = 1, \qquad u(2,t) = 2e^{-2t}\,, && t \ge 0\,. \end{aligned} \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass die Homogenisierung der Randwerte auf folgendes Problem für eine geeignet definierte Funktion v führt:

$$\begin{aligned} &v_t - 2v_{xx} = \sin(2\pi x)\,, && x \in (0,\,2),\ t > 0, \\ &v(x,0) = 3\sin(3\pi x)\,, && x \in [0,2], \\ &v(0,t) = v(2,t) = 0\,, && t \ge 0. \end{aligned} \tag{2}$$

(ii) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe (2) aus Teil i).

Aufgabe 2:

Gegeben ist das folgende Neumann Problem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, && 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), && 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0 && t > 0. \end{aligned}$$

a) Leiten Sie mit Hilfe eines geeigneten Produktansatzes eine Reihendarstellung der Lösung her.

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe aus a) mit $g(x) = 1 + \cos(2\pi x)$.

Abgabetermine: 15-18.06.21