

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie Entropielösungen der Differentialgleichung $u_t + \left(\frac{u^4}{4}\right)_x = 0$ mit den Anfangsbedingungen

$$\text{a) } u(x, 0) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ -1 & 0 \leq x, \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad \text{b) } u(x, 0) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 0 & 0 \leq x. \end{cases}$$

Prüfen Sie Ihre Lösung für die Bereiche, in denen sie nicht konstant ist, durch einsetzen in die Differentialgleichung .

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie den Typ folgender Differentialgleichungen

(i) $2u_{xx} - 8u_{xy} + 8u_{yy} + u_y = u$,

(ii) $2u_{xy} + u_{yy} + xu_x = \cos(y)$,

(iii) $3u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$,

(iv) $u_{xx} + e^x u_{yy} + \sin(x)(u_x + u_y) = y + x$,

(v) $(x^2 + y^2)u_{xx} + 2(x + y)u_{xy} + u_{yy} = 0$.

b) Sei u eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0$$

Zeigen Sie, dass dann auch $v(x, t) := u(cx, c^2t)$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung ist.

Abgabetermine: 01-04.06.21