Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Hausaufgaben

Aufgabe 1: [**4 +2 Punkte**]

a) Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u_t + u \cdot u_x &= 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= g(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Dabei sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion mit zwei Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen).

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(i) Es gibt eine eindeutige schwache Lösung.

(ii) Zum Erhalt der Entropielösung muss man zwei Stoßwellen einführen.

(iii) Die Entropielösung gilt für alle Zeiten, also für beliebige $t \in \mathbb{R}^+$.

Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Wie lautet die Sprungbedingung für die schwache Lösung von

$$\begin{aligned} u_t + (u^3)_x &= 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \begin{cases} 4 & \text{für } x \le 0, \\ 2 & \text{für } x > 0\,? \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie die Entropielösung der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

zum Zeitpunkt $t = 2$. Welches neue Problem tritt bei $t = 2$ auf?

Kür: Bestimmen Sie die Lösung für $t > 2$.

b) Physikalische Prozesse, die durch glatte Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen beschrieben werden, sind im allgemeinem reversibel. Kennt man die Lösungen zu einer bestimmten Zeit, so kann man sie sowohl für spätere als auch für frühere Zeiten angeben.

Zeichnen Sie die Charakteristiken für die beiden Anfangswertaufgaben für die Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangsdaten

$$u_1(x,0) = \begin{cases} 1 & x < -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - 2x & -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 0 & x > \frac{1}{4} \end{cases}$$

bzw.

$$u_2(x,0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

Bestimmen Sie für beide Anfangswertaufgaben die Lösung $u(x,1)$ zum Zeitpunkt $t = 1$.

Was schließen Sie aus Ihren Ergebnissen bezüglich der Reversibilität nicht glatter Lösungen der Burgers Gleichung?

Aufgabe 3:

Wir untersuchen noch einmal das einfache Verkehrsflussmodell aus Blatt 1 mit den dort eingeführten Bezeichnungen:

$u(x,t)$ = Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$v(x,t)$ = Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$q(x,t)$ = Fluss = Anzahl Fahrzeuge die x zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit passieren.

Wir verfeinern unser Modell aus Blatt 1, indem wir eine maximale Dichte und eine maximale Geschwindigkeit

u_{max} = maximale Dichte der Fahrzeuge (Stoßstange an Stoßstange),

v_{max} = maximale Geschwindigkeit

einführen.

Dies kann z. B. wie folgt geschehen:

$$v(u(x,t)) = v_{max}\left(1 - \frac{u(x,t)}{u_{max}}\right)$$

a) Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung ($u_t + q_x = 0$) auf.

b) Zeigen Sie, dass die Charakteristiken wieder Geraden sind, und bestimmen Sie deren Steigungen.

c) Skizzieren Sie die Charakteristiken für

$$v_{max} = 1 \quad \text{(Hier ist geeignet skaliert worden!)}$$

$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = u_{max}/2 & x < 0 \\ u_r = u_{max} & x > 0 \quad \text{(rote Ampel/ Stau etc.)} \end{cases}$$

d) Für die Burgers Gleichung hatten wir Stoßwellen nur im Fall $u_l > u_r$ zugelassen. Hier muss offensichtlich eine andere Bedingung her. Woran könnte das liegen?

Hinweis: Eine vollständige Beantwortung der Frage ist nur mit Hilfe der Vorlesungsfolien nicht möglich. Sie können hier nur eine Vermutung äußern!

Abgabetermine: 18-21.05.21