Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2021**
Prof. Dr. J. Struckmeier
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1: Alte Klausuraufgabe [6 + 3 Punkte]

Gegeben ist die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + 4t\,u_x &= 3\,, \qquad && x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \sin(2x) && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) Stellen Sie zunächst die charakteristischen Differentialgleichungen auf und lösen Sie diese.

b) Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$.

Aufgabe 2: (Für die ganz schnellen Studierenden)

Lösen Sie das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_t - 4e^{-x}u_x &= 1 \qquad && x \in \mathbb{R}\,, t > 0\,, \\ u(x,0) &= x && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: (Alte Klausuraufgabe, 5 Punkte)

Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

A) $u_t + 3u^3\,u_x = 0,$

B) $u_t + 3x\,u_x = 0,$

C) $u_t + 3\,u_x = 1\,.$

versehen mit der Anfangsbedingung

$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,,$

wobei $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende und stetig differenzierbare Funktion sei.

Für welche der Differentialgleichungen A), B), C) gelten für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe die folgenden Aussagen i) und oder ii)?

i) Die Lösung ist konstant entlang der Charakteristiken?
ii) die Charakteristiken sind Geraden?

Begründen Sie Ihre Antworten.