

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Armin Iske

Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg
Sommersemester 2020

Literaturquellen.

PRIMÄR:

- R. Ansorge, H. J. Oberle, K. Rothe, T. Sonar:
Mathematik in den Ingenieur- und Naturwissenschaften 2,
5. Auflage. WILEY-VCH, Weinheim, 2020.

SEKUNDÄR:

- K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik, Bände 1 und 2.
Springer, Berlin.
- K. Burg, H. Haf, F. Wille: Höhere Mathematik für Ingenieure,
Band 1: Analysis. B.G. Teubner, Stuttgart, 1992.

Inhalte Differentialgleichungen II

Partielle Differentialgleichungen:

- Beispiele partieller Differentialgleichungen.
- Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung.
- Skalare Erhaltungsgleichungen.
- Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung.
- Normalformen und korrekt gestellte Probleme.
- Die Laplacegleichung.
- Die Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung.
- Die Wellengleichung.
- Fourier-Methoden bei partiellen Differentialgleichungen.
- Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen.

1 Partielle Differentialgleichungen

1.1 Bezeichnungen und allgemeine Notationen

Definition: Eine Gleichung (bzw. ein Gleichungssystem) der Form

$$\mathbf{F} \left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p} \right) = \mathbf{0}$$

für eine (unbekannte) Funktion $\mathbf{u} : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, heißt **System partieller Differentialgleichungen (PDGL) p -ter Ordnung**.

Eine Funktion $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, die die Gleichungen erfüllt, heißt **Lösung** der PDGL. □

In Anwendungen treten typischerweise PDGLs erster und zweiter Ordnung auf.

Definition: Eine PDGL heißt

- (a) **linear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen $\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist.
- (b) **semilinear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen

$$\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$$

ist **und** die Koeffizienten nur von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ abhängen.

- (c) **quasilinear**, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin-linear in den Variablen

$$\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$$

ist. Die Koeffizienten können dann von $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \mathbf{u}}{\partial x_n^{p-1}}$ abhängen.

In allen anderen Fällen wird die PDGL als **nichtlinear** bezeichnet. □

Beispiele für lineare, quasilineare, semilineare, nichtlineare PDGLs.

- Die PDGL

$$a_1(x, y)u_x + a_2(x, y)u_y + b(x, y)u = c(x, y)$$

ist eine skalare **lineare PDGL 1. Ordnung** in zwei Variablen.

- Die PDGL

$$a_1(x, y, u)u_x + a_2(x, y, u)u_y = g(x, y, u)$$

ist eine skalare **quasilineare PDGL 1. Ordnung** in zwei Variablen.

- Die PDGL

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x_1, \dots, x_n) u_{x_i x_j} = b(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n})$$

ist ein **semilineares System 2. Ordnung** in n Variablen.

- Die PDGL

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = f(x, y, u, u_x \cdot u_y)$$

ist eine **nichtlineare skalare PDGL 1. Ordnung** in zwei Variablen. □

Bemerkung zur allgemeinen Notation bei PDGL

In Anwendungen treten typischerweise **Ortsvariablen** $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ (oft $n = 3$) sowie die **Zeitvariable** $t \in \mathbb{R}$ auf. Wir betrachten dann die allgemeine PDGL der Form

$$\mathbf{F} \left(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial t^p} \right) = \mathbf{0}$$

in $(n + 1)$ Variablen. Differentialoperatoren wie etwa

$$\nabla, \quad \text{div}, \quad \text{rot} \quad \text{oder} \quad \Delta$$

beziehen sich dann stets auf die n Ortsvariablen, zum Beispiel

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ \Delta u &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \end{aligned}$$

1.2 Motivation: Wieso partielle Differentialgleichungen?

Zur Beantwortung betrachten wir den **Reynoldsen Transportatz**.

Zur Zeit $t = 0$ nehme eine physikalische Größe (Ladung, Fluid etc.) die beschränkte und offene Menge $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ ein.

Die Funktion $\Phi(\mathbf{y}, t)$ beschreibe die Veränderung des Punktes $\mathbf{y} \in D_0$ in der Zeit,

$$\Phi : D_0 \times [0, T] \longrightarrow D_t \subset \mathbb{R}^n,$$

so dass

$$D_t := \{\Phi(\mathbf{y}, t) : \mathbf{y} \in D_0\}.$$

Die **Trajektorie** von $\mathbf{y} \in D_0$ ist die Abbildung $t \longrightarrow \Phi(\mathbf{y}, t) \in D_T$ und

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{y}, t) =: \mathbf{v}(\Phi(\mathbf{y}, t), t)$$

bezeichne das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ der physikalischen Größe.

Der Reynoldsche Transportsatz

Satz: Für eine differenzierbare, skalare Funktion $f : D_t \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{D_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} f + \operatorname{div}(f\mathbf{v}) \right\} (\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}$$

Beweisidee: Sei $J(\mathbf{y}, t) = \det(D_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{y}, t))$ die Jacobi-Matrix von $\Phi(\mathbf{y}, t)$ bezüglich $\mathbf{y}$. Transformiere damit D_t auf D_0 :

$$\int_{D_t} f(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \int_{D_0} f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y}.$$

Berechne dann die zeitliche Ableitung der rechten Seite

$$\frac{d}{dt} \int_{D_0} f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t) \, d\mathbf{y}$$

und transformiere zurück auf das zeitabhängige Gebiet D_t .

Die Kontinuitätsgleichung

Sei $u(\mathbf{x}, t)$ die Massendichte einer physikalischen Größe und es gelte ein **Erhaltungsprinzip** der Form

$$\frac{d}{dt} \int_{D_t} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0.$$

Dann folgt aus dem Reynoldschen Transportsatz

$$\int_{D_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u + \operatorname{div} (u\mathbf{v}) \right\} (\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 0.$$

Da D_t eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, folgt die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div} (u\mathbf{v})(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Diese Gleichung wird als **Kontinuitätsgleichung** bezeichnet.

Kontinuitätsgleichung und Flussfunktion

Schreibt man die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe der **Flußfunktion** $q(\mathbf{x}, t)$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)) = 0,$$

so ergibt sich **eine** Gleichung für **zwei** unbekannte Funktionen $u(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$.

Mathematische Modellierung:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{q}(u(\mathbf{x}, t), \nabla u(\mathbf{x}, t), \dots)$$

Einfachster Modellierungsansatz: Der Fluss $\mathbf{q}$ ist proportional zur Dichte u

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{a} \cdot u(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit einem } \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

Daraus folgt die **lineare Transportgleichung** (auch als **lineare Advektionsgleichung** bezeichnet)

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \mathbf{a} \cdot \nabla u(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Die Wärmeleitungs- oder Diffusionsgleichung

Mögliche Ausgangssituationen: Die Dichte $u(x, t)$ beschreibe

- die Konzentration eines chemischen Stoffes,
- die Temperatur eines Körpers oder
- ein elektrostatisches Potential.

Physikalische Modellierung: Der Fluss $\mathbf{q}$ ist **proportional zum Gradienten** der Dichte u , zeigt allerdings in die entgegengesetzte Richtung,

$$\mathbf{q}(x, t) := -a \nabla u(x, t) \quad \text{für ein } a > 0.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}(-a \nabla u(\mathbf{x}, t)) = 0$$

und damit die PDGL

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = a \Delta u(\mathbf{x}, t).$$

Fortsetzung des Beispiels

Setzen wir $\alpha = 1$, so erhalten wir die klassische **Wärmeleitungsgleichung** (auch lineare **Diffusionsgleichung** genannt)

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = \Delta u(\mathbf{x}, t).$$

Die Abschlussrelation

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\alpha \nabla u(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit einem } \alpha > 0$$

nennt man dabei entweder

- das **Ficksche Gesetz** der Diffusion,
- das **Fouriersche Gesetz** der Wärmeleitung oder
- das **Ohmsche Gesetz** der elektrischen Ladung.

Fazit: Drei unterschiedliche physikalische Probleme liefern eine identische partielle Differentialgleichung. □

Die Laplace- und Poissongleichung

Ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung unabhängig von der Zeit t , d.h.,

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = 0,$$

so erhält man die **Laplace-Gleichung**

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0.$$

Lösungen dieser Gleichung nennt man **harmonische Funktionen**.

Die Gleichung

$$-\Delta u(\mathbf{x}) = f$$

mit gegebener Funktion f , nennt man **Poisson-Gleichung**.

Hierbei beschreibt die Inhomogenität etwa eine vorgegebene räumliche Ladungsverteilung f und die Lösung u das dadurch erzeugte Potential. □

2 Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Die Methode der Charakteristiken

Wir betrachten zunächst eine skalare quasilineare PDGL 1. Ordnung,

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u) \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Eine Lösung kann durch die **Charakteristikenmethode** berechnet werden, wobei wir zunächst den homogenen und **linearen** Fall betrachten.

Definition: Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

heißt **charakteristisches DGL-System** einer homogenen linearen PDGL

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0 \quad \text{mit } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Die Methode der Charakteristiken

Wir berechnen nun

$$\frac{d}{dt}u(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}(t))u_{x_i}(\mathbf{x}(t)) = 0.$$

Fazit: Die Funktion $u(\mathbf{x})$ ist genau dann eine Lösung der homogenen linearen PDGL, wenn u entlang jeder Lösung $\mathbf{x}(t)$ des charakteristischen DGL-Systems konstant ist, d.h.

$$u(\mathbf{x}(t)) \equiv \text{const.}$$

Definition: Man nennt die Lösung $u(\mathbf{x})$ ein **erstes Integral** des charakteristischen DGL-Systems. □

Bemerkung: Die *Methode der Charakteristiken* ist also nichts anderes als eine Zurückführung der gegebenen PDGL auf gewöhnliche DGL's.

Beispiel: Wir betrachten die PDGL in drei Variablen

$$xu_x + yu_y + (x^2 + y^2)u_z = 0.$$

Das **charakteristische DGL-System** lautet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x \\ \dot{y} &= y \\ \dot{z} &= x^2 + y^2\end{aligned}$$

und besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^t$$

$$y(t) = c_2 e^t$$

$$z(t) = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)e^{2t} + c_3$$

Man nennt diese Lösungen auch die **charakteristischen Kurven**.

Fortsetzung des Beispiels: Für die Lösung der Ausgangsgleichung gilt damit

$$u(x(t), y(t), z(t)) = u\left(c_1 e^t, c_2 e^t, \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)e^{2t} + c_3\right) \equiv \text{const.}$$

Die **charakteristischen Kurven** erfüllen aber die Beziehungen

$$e^t = x(t)/c_1 = y(t)/c_2 \implies y(t)/x(t) = c_2/c_1 = c \in \mathbb{R}$$

und

$$z(t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_3 \implies z(t) - \frac{1}{2}(x(t)^2 + y(t)^2) = d \in \mathbb{R},$$

d.h. allein die beiden Konstanten c und d definieren den Wert von u entlang der charakteristischen Kurven. Daraus folgt die **Lösungsdarstellung**

$$u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)$$

mit einer beliebigen $\mathcal{C}^1$ -Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Quasilineare inhomogene Differentialgleichungen

Die Methode der Charakteristiken läßt sich auf Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

übertragen.

Man betrachtet dazu das erweiterte Problem

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit der unbekannten Funktion $U = U(\mathbf{x}, u)$ von $(n + 1)$ unabhängigen Variablen $\mathbf{x}$ und u .

Dann gilt: Ist $U(\mathbf{x}, u)$ eine Lösung mit $U_u \neq 0$, so ist durch $U(\mathbf{x}, u) = 0$ *implizit* eine Lösung $u = u(\mathbf{x})$ des Ausgangsproblems gegeben.

Beweis der letzten Aussage

Gilt $U_u \neq 0$, so lässt sich die Funktion $U(x, u)$ nach dem **Satz über implizite Funktionen** nach $u(x)$ auflösen. Wegen $U(x, u) = 0$ gilt dann

$$U_{x_i} + U_u u_{x_i} = 0.$$

Ferner haben wir

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u) U_{x_i} + b(x, u) U_u = 0$$

und daraus folgt

$$- \left(\sum_{i=1}^n a_i(x, u) u_{x_i} \right) U_u + b(x, u) U_u = 0.$$

Wir erhalten also mit $U_u \neq 0$ die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i(x, u) u_{x_i} = b(x, u).$$

□

Beispiel: Gesucht sei die **allgemeine Lösung** der quasilinearen Gleichung

$$(1 + x)u_x - (1 + y)u_y = y - x.$$

Das erweiterte Problem lautet dann

$$(1 + x)u_x - (1 + y)u_y + (y - x)u_u = 0.$$

Das **charakteristische DGL-System** ist

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 1 + x \\ \dot{y} &= -(1 + y) \\ \dot{u} &= y - x\end{aligned}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned}x(t) &= c_1 e^t - 1 \\ y(t) &= c_2 e^{-t} - 1 \\ u(t) &= c_3 - c_2 e^{-t} - c_1 e^t\end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels: Wir verfahren wie im letzten Beispiel und lösen das charakteristische System auf:

$$e^t = \frac{x+1}{c_1} = \frac{c_2}{y+1} \implies (x+1)(y+1) = c_1 \cdot c_2 = c \in \mathbb{R}$$

und

$$u = c_3 - (x+1) - (y+1) \implies u + x + y = d \in \mathbb{R}.$$

Erneut bestimmen alleine die beiden Konstanten c und d das Lösungsverhalten. Daraus folgt die allerdings **implizite** Lösungsdarstellung

$$\Phi\left((x+1)(y+1), u+x+y\right) = 0$$

mit einer beliebigen $\mathcal{C}^1$ -Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Beachte: Im Gegensatz zu linearen Gleichungen erhält man bei quasilinearen Gleichungen keine explizite Lösungsdarstellung und die Lösung existiert gegebenenfalls nur lokal. □

2.2 Anfangswertprobleme bei Gleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten nun den in Anwendungen häufig auftretenden Fall einer Zeitvariablen t und n Ortsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition: Das auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte **Anfangswertproblem**

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

bezeichnet man als ein **Cauchy-Problem**. Dabei ist zum Zeitpunkt $t = 0$ die **Anfangsbedingung**

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$$

explizit vorgegeben. □

Die Lösungen lassen sich erneut mit dem Charakteristikenverfahren berechnen.

Die Transportgleichung

Ein typisches Beispiel ist die Transportgleichung

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit dem konstanten Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Verwenden wir hier die Methode der Charakteristiken, so erhalten wir zunächst die $(n + 1)$ Differentialgleichungen

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{a}$$

und wir können ohne Einschränkung $t = \tau$ annehmen.

Die Lösung der zweiten Gleichung lautet dann

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \cdot t$$

mit einer Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Die charakteristischen Kurven sind Geraden, die zur Zeit $t = 0$ den Punkt $\mathbf{x}_0$ durchlaufen und in Richtung $\mathbf{a}$ laufen.

Fortsetzung des Beispiels (Transportgleichung)

Möchte man die Lösung an einem Punkt $(\mathbf{x}, t)$ bestimmen, so sucht man zunächst die zugehörige Charakteristik, die durch diesen Punkt läuft und den Wert $\mathbf{x}_0$ zur Zeit $t = 0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}t \quad \implies \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{a}t$$

Da die Lösung entlang der Charakteristiken konstant bleibt, folgt sofort die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)$$

Interpretation dieser Lösung: Das gegebene Anfangsprofil $u_0(\mathbf{x})$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ weitertransportiert, ohne seine Form zu ändern.

Probe: Es gilt:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{a} \cdot \nabla u_0, \quad \nabla u(\mathbf{x}, t) = \nabla u_0 \quad \implies \quad u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0.$$

□

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + txu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = \sin x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Die **charakteristische Gleichung** lautet

$$\dot{x} = tx, \quad x(0) = x_0$$

und besitzt die Lösung

$$x(t) = x_0 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Daraus folgt die **Lösung** des Anfangswertproblems

$$u(x, t) = \sin\left[x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right].$$

□

Problem: Lösungen existieren nur lokal in der Zeit

Wir kehren zu dem anfangs definierten **Cauchy-Problem** zurück,

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Das **charakteristische System** lautet

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}, t, u) \\ \dot{u} &= b(\mathbf{x}, t, u) \end{aligned}$$

mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und $u(0) = u_0(\mathbf{x}_0)$.

Dies ist ein **nichtlineares Differentialgleichungssystem**, das unter Umständen nur lokale Lösungen in der Zeit besitzt. Im Allgemeinen erhalten wir nur **lokale Lösungen** in der Zeit. □

Nichtlineare skalare Erhaltungsgleichungen

Eine wichtige Klasse von partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung sind die **nichtlinearen skalaren Erhaltungsgleichungen** in einer Raumdimension.

Das zugehörige **Cauchy--Problem** lautet

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Die gegebene Funktion $f = f(u)$ nennt man die **Flussfunktion**.

Solche Differentialgleichungen sind quasilinear, denn eine andere Darstellung der PDGL ist

$$u_t + a(u)u_x = 0$$

mit $a(u) = f'(u)$.

Man nennt die Funktion $a(u)$ auch in Analogie zur Transportgleichung die **lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit**. □

Die Burgers Gleichung

Die **Burgers Gleichung** (nach JOHANNES MARTINUS BURGERS, 1895-1981, niederländischer Physiker) ist eine Erhaltungsgleichung mit Flussfunktion $f(u) = u^2/2$. Das zugehörige Cauchy-Problem lautet

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Wir wählen die Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ 1 - x & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x \geq 1 \end{cases}$$

und verwenden die Methode der Charakteristiken, um die Lösung zu bestimmen.

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0.$$

Die Burgers Gleichung: Charakteristische Kurven

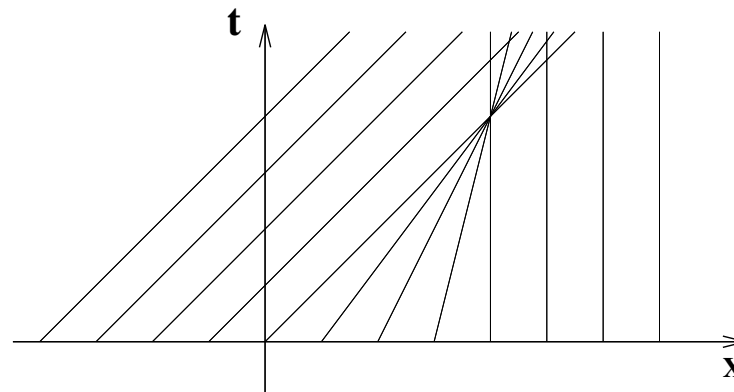
Da die Lösung der Burgers Gleichung entlang der Kurve $x(t)$ **konstant** bleibt, gilt

$$\dot{x} = u_0(x_0) \implies x(t) = x_0 + t u_0(x_0)$$

Mit der gegebenen Anfangsbedingung $u_0(x)$ erhalten wir

$$x(t) = \begin{cases} t + x_0 & : x_0 \leq 0 \\ (1 - x_0)t + x_0 & : 0 < x_0 < 1 \\ x_0 & : x_0 \geq 1 \end{cases}$$

Das zugehörige Bild der **charakteristischen Kurven** sieht wie folgt aus.

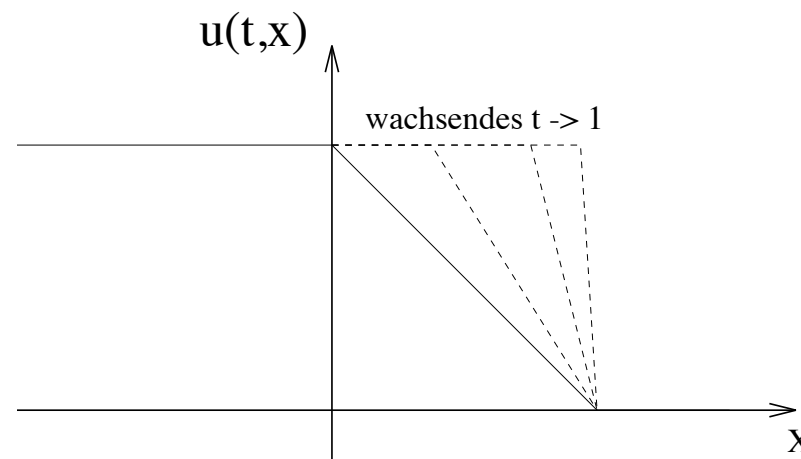


Die Burgers Gleichung: Singularität der Lösung

Zur Zeit $t = 1$ laufen unendlich viele Kurven durch den Punkt $x = 1$, d.h. im Punkt $(x, t) = (1, 1)$ ist die Lösung nicht mehr eindeutig. In der Tat existiert die **klassische** Lösung der Burgers Gleichung mit der angegebenen Anfangsbedingung nur **lokal** in der Zeit für $0 \leq t < 1$. Für $t \in [0, 1)$ ist die Lösung gegeben durch

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & : x < t \\ (1 - x)/(1 - t) & : 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$

Das zugehörige Bild der Lösung für verschiedene $t \in [0, 1)$:



2.3 Skalare Erhaltungsgleichungen

Das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

hat i.A. **keine globale** Lösung. Die **Burgers Gleichung** mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ 1 - x & : 0 < x < 1 \\ 0 & : x \geq 1 \end{cases}$$

besitzt nur auf dem Zeitintervall $[0, 1)$ die klassische Lösung

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & : x < t \\ (1 - x)/(1 - t) & : 0 \leq t \leq x < 1 \\ 0 & : x > 1 \end{cases}$$

Frage: Was passiert für $t \geq 1$?

Sei $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger.

Multiplizieren wir $u_t + f(u)_x = 0$ mit v und integrieren über $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x) v dx dt \\ &= - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t dx dt - \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x, 0) dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) v_x dx dt \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $u(x, 0) = u_0(x)$ ergibt sich

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + f(u) v_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x, 0) dx = 0.$$

□

Schwache Lösungen, Integrallösungen

Definition: Eine differenzierbare Funktion $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger heißt **Testfunktion**. □

Definition: Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ nennt man eine **Integrallösung** (oder **schwache Lösung**), falls die Beziehung

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x, 0) dx = 0$$

für alle Testfunktionen v erfüllt ist. □

Bemerkung: Eine Integrallösung muß **nicht notwendigerweise** eine differenzierbare Funktion sein, sondern kann sogar **Sprungstellen** besitzen. □

Riemann-Probleme

Definition: Das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$$

nennt man ein **Riemann-Problem** für skalare Erhaltungsgleichungen. □

Beispiel: Ein Riemann-Problem für die **Burgers Gleichung** lautet

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit unstetiger Anfangsbedingung $u_0(x) = u_l$ für $x \leq 0$; $u_0(x) = u_r$ für $x > 0$.

Integrallösungen für Riemann-Probleme

Fall 1: **Stoßwellenlösung** bei der Burgers Gleichung.

Für $u_l \neq u_r$ ist die **Stoßwelle**

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x \leq s(t) \\ u_r & : x > s(t) \end{cases}$$

eine Integrallösung. Dabei bezeichnet die Funktion $s(t)$ die Lage der **Stoßfront**, d.h. der Unstetigkeitsstelle oder Sprungstelle.

Die Stoßfront bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\dot{s}(t)$ wobei

$$\dot{s}(t) = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

und $s(0) = 0$ ist. Diese Beziehung heißt **Rankine-Hugoniot Bedingung**. □

Integrallösungen für Riemann-Probleme

Fall 2: **Verdünnungswelle** bei der Burgers Gleichung.

Für $u_l < u_r$ ist die **Verdünnungswelle** eine Integrallösung

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x \leq u_l t \\ \frac{x}{t} & : u_l t \leq x \leq u_r t \\ u_r & : x \geq u_r t \end{cases}$$

Man beachte, dass die Lösung $u(x, t)$ eine **stetige** Funktion ist.

Die Lösung ist entlang der Geraden $x = u_l t$ und $x = u_r t$ aber **nicht** differenzierbar und daher nur eine Integrallösung.

Bemerkung: Für $u_l < u_r$ stellt sich die Frage, welche der Lösungen (Stoßwelle oder Verdünnungswelle) physikalisch von Bedeutung ist. Es wird sich zeigen, dass nur die Verdünnungswelle relevant ist. □

Beschreibung der Stoßwellenlösung

Definition: Eine Stoßwellenlösung u ist eine Integrallösung der Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

wenn eine **Stoßfront** $x = s(t)$, $s \in \mathcal{C}^1$ existiert, sodass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PDGL ist und u bei $x = s(t)$ eine Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t)$$

besitzt. Die Größe $\dot{s}(t)$ nennt man die **Stoßgeschwindigkeit**. □

Satz: Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}$ die **Rankine-Hugoniot Bedingung**

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-, t)) - f(u(s(t)^+, t))}{u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)}.$$

□

Herleitung der Rankine–Hugoniot Bedingung

Eine Integrallösung erfüllt die Beziehung

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(\xi, t) d\xi = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t))$$

Wählen wir $x_1 < s(t) < x_2$ so folgt

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{x_1}^{s(t)} u(\xi, t) d\xi + \int_{s(t)}^{x_2} u(\xi, t) d\xi \right) = f(u(x_1, t)) - f(u(x_2, t)).$$

Da $u(x, t)$ für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ nach Definition eine differenzierbare Lösung ist, können wir unter den beiden Integralen ableiten:

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi + \dot{s} u(s(t)^-, t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi - \dot{s} u(s(t)^+, t) + f_2 - f_1 = 0.$$

Fortsetzung der Herleitung

Also

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi + \dot{s} u(s(t)^-, t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} d\xi - \dot{s} u(s(t)^+, t) + f_2 - f_1 = 0$$

mit

$$f_1 := f(u(x_1, t)), \quad f_2 := f(u(x_2, t))$$

Im Grenzfall $x_1 \rightarrow s(t)^-$ und $x_2 \rightarrow s(t)^+$ verschwinden die Integrale und wir erhalten

$$\dot{s} u(s(t)^-, t) - \dot{s} u(s(t)^+, t) = f(u(s(t)^-)) - f(u(s(t)^+))$$

Dies ist aber gerade die Rankine-Hugoniot Bedingung in der Form

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]}.$$

□

Beispiel: Wir betrachten die Burgers Gleichung mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$$

und $u_l > u_r$.

Die Rankine-Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{u_l^2/2 - u_r^2/2}{u_l - u_r} = \frac{(u_l - u_r)(u_l + u_r)}{2(u_l - u_r)} = \frac{1}{2}(u_l + u_r)$$

Damit lautet die Stoßwellenlösung dieses Problems

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & : x \leq \frac{1}{2}(u_l + u_r) t \\ u_r & : x > \frac{1}{2}(u_l + u_r) t \end{cases}$$

□

Beschreibung der Verdünnungswelle

Wir betrachten das Riemann-Problem

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : x \leq 0 \\ u_r & : x > 0 \end{cases}$$

wobei nun $u_l < u_r$ gelte.

Zusätzlich nehmen wir an, dass $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $f'' > 0$ gilt, die Flussfunktion sei also **strikt konvex**. Schließlich setzen wir noch

$$g := (f')^{-1}.$$

Beschreibung der Verdünnungswelle

Nach Annahme ist die Flussfunktion f strikt konvex, d.h. f' ist streng monoton wachsend. Also gilt:

$$u_l < u_r \implies f'(u_l) < f'(u_r).$$

Es gibt daher **genau zwei** Typen von Charakteristiken, nämlich

$$x(t) = x_0 + f'(u_l) t \quad \text{und} \quad x(t) = x_0 + f'(u_r) t$$

Diese beiden Kurvenscharen füllen aber **nicht** den ganzen Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ aus, sondern es entsteht ein Bereich Ω , der nicht durchlaufen wird,

$$\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : f'(u_l) \cdot t < x < f'(u_r) \cdot t\}$$

In Ω liefert die Methode der Charakteristiken keine Werte und wir können im Prinzip die Lösung auf Ω mit einer beliebigen **Integrallösung** füllen.

Beschreibung der Verdünnungswelle

Satz: Für $u_l < u_r$ ist die **Verdünnungswelle**, gegeben durch

$$u(x, t) := \begin{cases} u_l & : x < f'(u_l)t \\ g(x/t) & : f'(u_l)t < x < f'(u_r)t \\ u_r & : x > f'(u_r)t, \end{cases}$$

eine Integrallösung des Riemannproblems. Insbesondere ist die Verdünnungswelle eine **stetige** Funktion.

Beweis: Wir zeigen zunächst, dass die angegebene Funktion in den beiden Punkten

$$x = f'(u_l)t \quad \text{und} \quad x = f'(u_r)t$$

stetig ist. Es gilt

$$g\left(\frac{f'(u_l)t}{t}\right) = g(f'(u_l)) = (f')^{-1}(f'(u_l)) = u_l.$$

Beschreibung der Verdünnungswelle

sowie

$$g\left(\frac{f'(u_r)t}{t}\right) = g(f'(u_r)) = (f')^{-1}(f'(u_r)) = u_r$$

Weiter ist die Verdünnungswelle konstant für $x < f'(u_l)t$ und $x > f'(u_r)t$ und löst daher die vorgegebene Erhaltungsgleichung.

Für $f'(u_l)t < x < f'(u_r)t$ berechnet man

$$u_t = -\frac{x}{t^2} g'(x/t)$$

$$f(u)_x = f(g(x/t))_x = f'(g(x/t)) \frac{g'(x/t)}{t} = \frac{x}{t^2} g'(x/t)$$

Daraus folgt, dass $g(x/t)$ ebenfalls die Gleichung $u_t + f(u)_x = 0$ löst.

Mit der Stetigkeit folgt daraus, dass die Verdünnungswelle tatsächlich eine Integrallösung ist. ■

Problem: Integrallösungen sind nicht eindeutig

Beispiel: Wir betrachten wieder die Burgers Gleichung mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : x \leq 0 \\ 1 & : x > 0 \end{cases}$$

Dann existieren zum Beispiel die beiden Integrallösungen

$$u_1(x, t) = \begin{cases} 0 & : x \leq t/2 \\ 1 & : x > t/2 \end{cases}$$

und

$$u_2(x, t) = \begin{cases} 0 & : x < 0 \\ x/t & : 0 \leq x \leq t \\ 1 & : x > t \end{cases}$$

Die erste Lösung ist eine **Stoßwelle**, die zweite eine **Verdünnungswelle**.

Frage: Welche der beiden Lösungen ist physikalisch korrekt?

Entropiebedingung und Entropielösungen

Frage: Welche der beiden ist die physikalisch richtige Lösung?

Man benötigt eine Zusatzbedingung, die die physikalisch richtige Integrallösung auswählt.

Definition: Eine Integrallösung heißt **Entropielösung**, falls die Lösung die folgende **Entropiebedingung** (LAX-OLEINIK-Bedingung) erfüllt:

$\exists C > 0$, so dass für alle $x, z \in \mathbb{R}$, $t > 0$ mit $z > 0$ gilt

$$u(t, x + z) - u(t, x) < \frac{C}{t} z.$$

Satz: Erfüllt eine Integrallösung die oben angegebene Entropiebedingung, so ist diese Lösung eindeutig, d.h. Entropielösungen sind eindeutige Lösungen. $\square$

Bemerkung: In unserem letzten Beispiel erfüllt die Verdünnungswelle die obige Entropiebedingung. $\square$

3 Partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung

Definition: Eine lineare PDGL 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + fu = g$$

Dabei sind die Terme a_{ij} , b_i , f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$.

Den ersten Term nennt man den **Hauptteil** der PDGL. Weiter gelte ohne Einschränkung

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \dots, n$$

Spezialfall: Gilt $a_{ij} \equiv \text{const}$, $i, j = 1, \dots, n$, so lässt sich die PDGL auch in folgender Matrixschreibweise darstellen:

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g$$

mit der symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

□

3.1 Normalformen linearer Gleichungen 2. Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung in Matrixschreibweise

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Erinnerung (Lineare Algebra): Hauptachsentransformation.

Satz: Jede reelle, symmetrische Matrix $\mathbf{A}$ ist diagonalisierbar. Weiterhin gilt

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{S},$$

wobei $\mathbf{S}$ als eine orthogonale Matrix gewählt werden kann. □

Erinnerung: Eine reelle Matrix $\mathbf{S}$ heißt orthogonal, falls gilt

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}^T.$$

□

Ansatz zur Herleitung von Normalformen

Verwende die **Koordinatentransformation** $\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y}$ bzw. $\mathbf{y} = \mathbf{S}^T \mathbf{x}$ und setze

$$\tilde{u}(\mathbf{y}) := u(\mathbf{S}\mathbf{y}).$$

Mit $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{S}^T \mathbf{x})$ folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$$

und wegen $\frac{\partial y_j}{\partial x_i} = s_{ij}$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^n s_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}$$

Die letzte Beziehung bedeutet aber gerade:

$$\nabla_{\mathbf{x}} u(\mathbf{x}) = \mathbf{S} \nabla_{\mathbf{y}} \tilde{u}(\mathbf{S}^T \mathbf{x})$$

oder in formaler Schreibweise $\nabla_{\mathbf{x}} = \mathbf{S} \nabla_{\mathbf{y}}$. Transponieren wir dies, so folgt

$$\nabla_{\mathbf{x}}^T = (\mathbf{S} \nabla_{\mathbf{y}})^T = \nabla_{\mathbf{y}}^T \mathbf{S}^T.$$

Diagonalform einer PDGL 2. Ordnung

Ergebnis: Löst u die Gleichung $(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g$, so erhalten wir für $\tilde{u}$ die partielle Differentialgleichung

$$(\nabla^T \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} \nabla) \tilde{u} + (\mathbf{b}^T \mathbf{S} \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}.$$

Definition: Gegeben sei die **partielle DGL 2. Ordnung**

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Dann ist die zugehörige **Diagonalform** der PDGL gegeben durch

$$(\nabla^T \mathbf{D} \nabla) \tilde{u} + ((\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{b}})^T \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

mit der Diagonalmatrix $\mathbf{D} = \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S}$ mit $\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}$ sowie

$$\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{y}) = \mathbf{b}(\mathbf{S} \mathbf{y}), \quad \tilde{f}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{S} \mathbf{y}) \quad \text{und} \quad \tilde{g}(\mathbf{y}) = g(\mathbf{S} \mathbf{y}).$$

□

Ein Beispiel zu Diagonalformen

Wir betrachten den Fall von zwei unabhängigen Variablen

$$a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right) + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + b_1(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1, x_2) \frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1, x_2)u = g(x_1, x_2)$$

Definieren wir den Vektor $\tilde{\mathbf{p}}$ als

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{b}}$$

mit einer orthogonalen Matrix $\mathbf{S}$, so lautet die Diagonalform

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{p}_1 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}$$

Beachte: Die Transformation auf Diagonalform ist keineswegs **eindeutig**, die beiden Koeffizienten des **Hauptterms** sind aber stets die **Eigenwerte** von $\mathbf{A}$. $\square$

Klassifikation partieller DGLs 2. Ordnung

Definition: Gegeben sei die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

- Sind sämtliche Eigenwerte von $\mathbf{A}$ von Null verschieden und besitzen sie einheitliche Vorzeichen, so nennt man die Gleichung **elliptisch**.
- Sind sämtliche Eigenwerte von $\mathbf{A}$ von Null verschieden, wobei ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n - 1$ Eigenwerte besitzt, so nennt man die Gleichung **hyperbolisch**.
- Ist mindestens ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ Null, so ist die Gleichung **parabolisch**.

Beispiel: Die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung in **Diagonalform** ist

- **elliptisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$;
- **hyperbolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$;
- **parabolisch**, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$.

□

Bemerkung: Die Typeneinteilung lässt sich auf Fälle mit **nichtkonstanter** Koeffizientenmatrix **A** erweitern. Zum Beispiel hat die Gleichung

$$yu_{xx} - u_{xy} - u_{yx} + xu_{yy} = 0$$

die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$$

Die von dem Produkt xy abhängigen Eigenwerte von **A** sind

$$\lambda_1 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = xy - 1$$

Die partielle Differentialgleichung ist also

- **parabolisch** auf der Hyperbel $xy = 1$;
- **elliptisch** in den beiden konvexen Bereichen $xy > 1$;
- **hyperbolisch** im zusammenhängenden Bereich $xy < 1$.

□

Normalformen partieller DGLs 2. Ordnung

Definition:

- Die Normalform einer **elliptischen** Differentialgleichung in n Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ ist

$$-\Delta u + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + fu = g$$

- Die Normalform einer **hyperbolischen** Differentialgleichung in $(n + 1)$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \dots, x_n, t)^T$ ist

$$u_{tt} - \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + fu = g$$

- Die Normalform einer **parabolischen** Differentialgleichung in $(n + 1)$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \dots, x_n, t)^T$ ist

$$-\Delta u + b_0 u_t + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_{x_i} + fu = g$$

3.2 Korrekt gestellte Probleme

Definition: Ein **korrekt gestelltes Problem** besteht aus einer in einem Gebiet definierten partiellen Differentialgleichung zusammen mit einer bestimmten Menge von Anfangs- und/oder Randbedingungen, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- **Existenz:** Es existiert mindestens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt.
- **Eindeutigkeit:** Die Lösung ist eindeutig.
- **Stabilität:** Die Lösung hängt stetig von den gestellten Anfangs- und Randbedingungen ab.

Beispiel: Das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = u_0, u_t = v_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

ist ein **korrekt gestelltes** hyperbolisches Problem. □

Beispiel: Die eindimensionale Wellengleichung

Die eindeutig bestimmte Lösung ist durch die **Formel von D'ALEMBERT** gegeben

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left(u_0(x - t) + u_0(x + t) \right) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} v_0(\xi) d\xi$$

Sei nun $\tilde{u}(x, t)$ die Lösung zu den Anfangsdaten $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, t) - u(x, t) &= \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_0(x - t) - u_0(x - t) \right) + \frac{1}{2} \left(\tilde{u}_0(x + t) - u_0(x + t) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \left(\tilde{v}_0(\xi) - v_0(\xi) \right) d\xi \end{aligned}$$

Daraus folgt aber die **stetige Abhängigkeit** von den Daten:

$$|\tilde{u}(x, t) - u(x, t)| \leq \|\tilde{u}_0 - u_0\|_\infty + t \|\tilde{v}_0 - v_0\|_\infty.$$

□

Anfangswertaufgabe für die Laplace-Gleichung

JACQUES HADAMARD, 1865-1963, französischer Mathematiker: Das Anfangswertproblem für die zweidimensionale Laplace-Gleichung

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = u_0, u_y = v_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \end{cases}$$

ist **kein** korrekt gestelltes elliptisches Problem: Setzen wir $u_0(x) = v_0(x) = 0$, so ist die eindeutig bestimmte Lösung

$$u(x, y) = 0.$$

Lauten die Anfangsdaten dagegen

$$u_0^n(x) = 0, \quad v_0^n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N},$$

so ist die eindeutig bestimmte Lösung zu den Anfangsdaten (u_0^n, v_0^n)

$$u^n(x, y) = \frac{1}{n^2} \sin(nx) \sinh(ny).$$

Fortsetzung des Beispiels

Nun gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_0^n = u_0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} v_0^n = v_0.$$

Vergleicht man aber beide Lösungen, so ergibt sich wegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sinh(ny) = \infty \quad \text{für } y > 0,$$

das Grenzverhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^n(x, y) \neq u(x, y)$$

d.h. die Lösung hängt nicht stetig von den Anfangsdaten ab. □

Randwertaufgabe für die Laplace-Gleichung

Das Randwertproblem für die zweidimensionale Laplace-Gleichung

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 & \text{in } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \\ u = g & \text{auf } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \end{cases}$$

ist ein **korrekt gestelltes** elliptisches Problem.

Die eindeutig bestimmte Lösung ist durch die

Poissonsche Integralformel

gegeben

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{2\pi} \int_{\|z\|=1} \frac{g(z)}{\|x - z\|^2} d\sigma$$

und hängt **stetig** von den Randdaten $g(x, y)$ auf dem Rand $x^2 + y^2 = 1$ ab. $\square$

4 Die Laplace-Gleichung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der **Laplace-Gleichung**

$$\Delta u = 0$$

für $u = u(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$ offen, und der zugehörigen Poissongleichung

$$-\Delta u = f$$

mit vorgegebener rechter Seite $f = f(\mathbf{x})$.

Definition: Eine $\mathcal{C}^2$ -Funktion $u = u(\mathbf{x})$, die die Laplace-Gleichung erfüllt, d.h.

$$\Delta u = 0,$$

heißt **harmonische Funktion**. □

Bedeutung:

- Mittelwerteigenschaft, Maximumprinzipien etc.;
- Komplexe Funktionen: analytische Funktionen, Satz von Liouville etc.

4.1 Die Fundamentallösung

Wir versuchen zunächst, eine **explizite Lösung** der Laplace-Gleichung zu berechnen, mit der wir weitere Lösungsdarstellungen entwickeln können.

Beobachtung: Der Laplace-Operator Δ ist **invariant gegenüber Rotationen** in $\mathbb{R}^n$.

Lösungsansatz: Wir suchen eine Funktion $u(\mathbf{x})$, die nur vom Abstand $\|\mathbf{x}\|$ zum Ursprung abhängt.

$$u(\mathbf{x}) = v(r), \quad r = \|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$$

Man rechnet leicht nach

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1/2} 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0)$$

und damit gilt für $i = 1, \dots, n$

$$u_{x_i} = v'(r) \frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + v'(r) \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3} \right).$$

Die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung

Wir erhalten also

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r)$$

und mit $\Delta u = 0$ ergibt sich **die gewöhnliche Differentialgleichung**

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}v'(r) = 0$$

Setzen wir $w = v' \neq 0$, so löst w die **lineare Differentialgleichung**

$$w' = -\frac{n-1}{r}w.$$

Die **allgemeine Lösung** dieser Gleichung ist gegeben durch

$$w(r) = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$$

mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $v(r)$ gilt demnach

$$v' = \frac{\alpha}{r^{n-1}}.$$

Die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung

Die Gleichung für v können wir integrieren und bekommen damit eine Lösung der Form

$$v(r) = \begin{cases} -b \log r + c & (n = 2) \\ \frac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases}$$

mit den beiden Konstanten b und c .

Definition: Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x}\| & (n = 2) \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|\mathbf{x}\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$$

heißt **Fundamentallösung der Laplace-Gleichung**.

Die Konstante $\alpha(n)$ bezeichnet dabei das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$. $\square$

Lösungsformel für die Poisson-Gleichung

Bemerkung: Die Fundamentallösung ist für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit $\mathbf{x} \neq 0$ eine **harmonische** Funktion.

Beispiel: Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt $\text{vol}(K_1(0)) = \alpha(3) = 4\pi/3$ und somit ist die **Fundamentallösung** gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}.$$

Satz: Eine Lösung der **Poisson-Gleichung**

$$-\Delta u = f$$

auf dem **Vollraum** $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

□

4.2 Eigenschaften harmonischer Funktionen

Mittelwerteigenschaft: Der Funktionswert einer harmonischen Funktion an einem Punkt $\mathbf{x}$ ist stets gleich dem **Mittelwert** von u über eine Kugel mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ bzw. der zugehörigen Sphäre um $\mathbf{x}$.

Genauer gilt das folgende Resultat.

Satz: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $u \in \mathcal{C}^2(U)$ harmonisch in U , so gilt

$$u(\mathbf{x}) = \oint_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u \, dS = \int_{B(\mathbf{x}, r)} u \, dy$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$. □

Notation: Bei Mittelungen über die Kugel oder die Sphäre schreiben wir

$$\oint \cdots = \frac{1}{\text{vol}(B(\mathbf{x}, r))} \int \cdots$$

□

Beweis der Mittelwerteigenschaft

Für ein festes $\mathbf{x} \in U$ definieren wir die Funktion $\phi(r)$ mittels

$$\phi(r) := \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) = \int_{\partial B(0, 1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \, dS(\mathbf{z})$$

Dann gilt

$$\phi'(r) = \int_{\partial B(0, 1)} Du(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z} \, dS(\mathbf{z})$$

und mit Hilfe der Greenschen Formeln erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} Du(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r} \, dS(\mathbf{y}) \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \, dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0. \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beweises

Damit ist ϕ konstant und es gilt

$$\phi(r) = \lim_{t \rightarrow 0} \phi(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} u(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x})$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u \, d\mathbf{y} &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(\mathbf{x}, s)} u \, dS \right) ds \\ &= u(\mathbf{x}) \int_0^r n \alpha(n) s^{n-1} ds = \alpha(n) r^n u(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Damit ergibt sich gerade die Mittelwertformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u \, d\mathbf{y}.$$



Umkehrung der Mittelwerteigenschaft

Satz: Für die Funktion $u \in \mathcal{C}^2(U)$ gelte für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ die **Mittelwerteigenschaft**

$$u(\mathbf{x}) = \oint_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u dS.$$

Daraus folgt, dass u auf U **harmonisch** ist.

Beweis: Ist $\Delta u \neq 0$, so existiert eine Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$, sodass

$$\Delta u > 0 \quad \text{oder} \quad \Delta u < 0$$

innerhalb von $B(\mathbf{x}, r)$ gilt.

Wir wissen aber, dass

$$\phi'(r) = \frac{r}{n} \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = 0.$$

Dies liefert einen Widerspruch, also ist u harmonisch auf U . ■

Das Maximumprinzip harmonischer Funktionen

Satz: Sei $u \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\bar{U})$ harmonisch in U . Dann gilt:

- **Das Maximumprinzip:**

$$\max_{x \in \bar{U}} u(x) = \max_{x \in \partial U} u(x)$$

- **Das starke Maximumprinzip:**

Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $x_0 \in U$ mit

$$u(x_0) = \max_{x \in \bar{U}} u(x)$$

so folgt, dass u auf U konstant ist.

Beweisidee: Verwende auf geeignete Weise die **Mittelwerteigenschaft** harmonischer Funktionen. □

Eine wichtige **Anwendung** des Maximumsprinzips bei partiellen DGLn: Lösungen von elliptischen Randwertaufgaben sind eindeutig. □

Eine Anwendung: Elliptische Randwertaufgaben

Satz: Sei $g \in \mathcal{C}(\partial U)$, $f \in \mathcal{C}(U)$. Dann existiert **höchstens eine** Lösung $u \in \mathcal{C}^2(U) \cap \mathcal{C}(\bar{U})$ des Randwertproblems

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{in } U \\ u &= g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

Beweis: Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen. Dann löst $w = \pm(u_1 - u_2)$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u &= 0 & \text{in } U \\ u &= 0 & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

Aus dem Maximumprinzip folgt dann direkt

$$w = \pm(u_1 - u_2) = 0$$

identisch auf U und daher gilt $u_1 \equiv u_2$. ■

Mittelwerteigenschaft und Maximumprinzip

Es gelten die folgenden Aussagen.

- Erfüllt eine stetige Funktion $u \in \mathcal{C}(U)$ auf einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset U$ die **Mittelwerteigenschaft**, so ist u unendlich oft differenzierbar, d.h. $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$.
- **Satz von Liouville:** Ist die Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ harmonisch auf $\mathbb{R}^n$ und beschränkt, so ist u auf ganz $\mathbb{R}^n$ konstant.
- **Beschränkte Lösungen der Poissongleichung:** Sei $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 3$. Dann hat jede beschränkte Lösung der Poissongleichung $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$ die Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + C$$

mit einer Konstanten C .

□

4.3 Die Greensche Funktion

Definition:

- Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ u = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

nennt man das **Dirichlet-Problem** der Poisson-Gleichung (bzw. der Laplace-Gleichung, falls $f = 0$).

- Das Randwertproblem

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } U \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \partial U \end{cases}$$

nennt man das **Neumann-Problem** der Poisson-Gleichung (bzw. der Laplace-Gleichung, falls $f = 0$). Dabei ist n die äußere Normale an ∂U . $\square$

Die Greensche Funktion

Proposition: Sei $u \in \mathcal{C}^2(\overline{U})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, eine beliebige Funktion. Dann gilt für alle Punkte $\mathbf{x} \in U$ die Beziehung

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} \left(\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) dS(\mathbf{y}) \\ - \int_U \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

Dabei ist die Funktion Φ die Fundamentallösung der Laplacegleichung. □

Fazit: Man kann jeden Funktionswert $u(\mathbf{x})$ bestimmen, wenn man die Werte von Δu in U sowie u und $\partial u / \partial \mathbf{n}$ entlang des Randes ∂U kennt.

Man beweist die Proposition mit Hilfe der Greenschen Formeln (aus Analysis III).

Anwendung auf Randwertprobleme der Laplace- und Poisson-Gleichung:

Wir können im Prinzip die Lösung an jedem Punkt berechnen, aber benötigen dazu Randdaten sowohl für u als auch die Ableitung $\partial u / \partial \mathbf{n}$.

Definition der Greenschen Funktion

Definition: Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ für festes $\mathbf{x} \in U$ die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x = 0 & \text{in } U \\ \Phi^x = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \partial U. \end{cases}$$

Dann ist die **Greensche Funktion** auf U gegeben durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y})$$

und definiert für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ mit $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. □

Satz: Sei $u \in C^2(\bar{U})$ eine Lösung des Dirichlet-Problems für die Poisson-Gleichung. Dann läßt sich u in der Form

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial U} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int_U f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in U)$$

darstellen.

Beweis des Satzes

Nach obiger Proposition hatten wir die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial U} \left(\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) dS(\mathbf{y}) \\ - \int_U \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Das Problem dabei war, dass uns beim **Dirichlet-Problem** die Randdaten von **$\partial u / \partial \mathbf{n}$** nicht bekannt sind. Mit den **Greenschen Formeln** gilt jedoch

$$- \int_U \Phi^x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$$

und daher

$$\int_{\partial U} \Phi^x(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \int_U \Phi^x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}).$$

Fortsetzung des Beweises

Aus der Randbedingung $\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ folgt

$$\int_{\partial U} \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \int_U \Phi^x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$$

Wir erhalten damit unter Ausnutzung der obigen Proposition die Darstellung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \int_{\partial U} \left(\Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right) dS(\mathbf{y}) \\ &\quad - \int_U \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \int_{\partial U} u(\mathbf{y}) \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^x(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}} \right)}_{-\frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}}} dS(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int_U \underbrace{(\Phi^x(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}))}_{-G(\mathbf{x}, \mathbf{y})} \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

□

Eigenschaften der Greenschen Funktion

Die **Greensche Funktion** erfüllt die folgenden Eigenschaften.

- Die Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ harmonisch in $\mathbf{y}$;
- weiterhin erfüllt $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ homogene Randbedingungen, d.h.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{für alle } \mathbf{y} \in \partial U, \mathbf{x} \in U;$$

- die Greensche Funktion ist eindeutig bestimmt;
- die Greensche Funktion ist symmetrisch, d.h.

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

Auf **einfachen** Gebieten läßt sich die Greensche Funktion elementar berechnen:

- Für den Halbraum

$$\mathbb{R}_+^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \mid x_n > 0\}$$

- oder für die Einheitskugel $B(0, 1)$.

Die Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}_+^n$

Allgemein ist die Greensche Funktion gegeben durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y})$$

Dabei ist $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ die Fundamentallösung und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung von

$$\begin{cases} \Delta \Phi^x = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ \Phi^x = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \mid x_n = 0\} \end{cases}$$

Für einen Punkt $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ definieren wir die **Spiegelung** an der Ebene $\partial\mathbb{R}_+^n$ mittels

$$\tilde{x} = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$$

und verwenden dann für die Funktion $\Phi^x = \Phi^x(\mathbf{y})$ den **Ansatz**

$$\Phi^x(\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n)$$

definiert für $x, y \in \mathbb{R}_+^n$.

Die Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}_+^n$

Da der Punkt $\tilde{\mathbf{x}}$ nicht in $\mathbb{R}_+^n$ liegt, ist $\Phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$ auf dem **ganzen** Halbraum $\mathbb{R}_+^n$ harmonisch.

Weiterhin gilt auf dem Rand

$$\begin{aligned}\Phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) &= \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, x_n) \\ &= \Phi(y_1 - x_1, \dots, y_{n-1} - x_{n-1}, -x_n) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}),\end{aligned}$$

da die Fundamentallösung nur von $\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$ abhängt.

Also löst die Funktion $\Phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})$ das Randwertproblem

$$\begin{cases} \Delta \Phi^{\mathbf{x}} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ \Phi^{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \{\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T \mid y_n = 0\} \end{cases}$$

und die Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}_+^n$ lautet demnach

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) \quad \text{für } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^n \text{ mit } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Der Poisson-Kern für den Halbraum $\mathbb{R}_+^n$

Man berechnet nun

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)} \left[\frac{y_n - x_n}{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^n} - \frac{y_n + x_n}{\|\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}\|^n} \right] \end{aligned}$$

und damit gilt für $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n}$$

Definition: Die Funktion

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n} \quad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n \text{ und } \mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}_+^n$$

heißt **Poisson-Kern** von $\mathbb{R}_+^n$.

□

Dirichlet-Problem für die Laplace-Gleichung auf $\mathbb{R}_+^n$

Satz: Die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+^n \\ u = g & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T : x_n = 0\} \end{cases}$$

ist gegeben durch die **Poissonsche Integralformel**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int_{\partial\mathbb{R}_+^n} \frac{g(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n} d\mathbf{y}.$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^n} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y} = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist.

Man kann sogar zeigen, dass die Lösung $u(x)$ **unendlich oft differenzierbar** ist. $\square$

Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0, 1)$.

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ nennt man den Punkt $\tilde{\mathbf{x}}$ mit

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|^2}$$

den **dualen Punkt** von $\mathbf{x}$ bezüglich $\partial B(0, 1)$.

Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{cases} \Delta \Phi^{\mathbf{x}} = 0 & \text{in } B^0(0, 1) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < 1\} \\ \Phi^{\mathbf{x}} = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) & \text{auf } \partial B(0, 1) \end{cases}$$

gegeben durch

$$\Phi^{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) := \Phi(\|\mathbf{x}\|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})).$$

Damit erhalten wir die **Greensche Funktion** für die Einheitskugel mit

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(\|\mathbf{x}\|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})) \quad \text{für } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in B(0, 1) \text{ mit } \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

□

Das Dirichlet-Problem auf $B(0, 1)$

Satz: Die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \mid \|\mathbf{x}\| < 1\} \\ u = g & \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T \mid \|\mathbf{x}\| = 1\} \end{cases}$$

ist gegeben durch die **Poissonsche Integralformel**

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{n\alpha(n)} \int_{\|\mathbf{y}\|=1} \frac{g(\mathbf{y})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n} dS(\mathbf{y}).$$

Der **Poisson-Kern** für die Einheitskugel lautet demnach

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1 - \|\mathbf{x}\|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^n} \quad \text{für } \|\mathbf{x}\| < 1 \text{ und } \|\mathbf{y}\| = 1.$$

□

Bemerkung: Mit der Transformation $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(r\mathbf{x})$ kann man leicht eine Darstellung für die Kugel $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| < r\}$ herleiten.

□

5 Die Wärmeleitungsgleichung

Wir suchen Lösungen der **Wärmeleitungsgleichung** (**Diffusionsgleichung**)

$$u_t = \Delta u.$$

Dabei bezeichnet $t \geq 0$ die **Zeitvariable** und $\mathbf{x} \in U$, für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, die **Ortsvariable**. Insbesondere untersuchen wir Anfangs- oder Anfangs-Randwertprobleme der folgenden Form.

- Das **Anfangswertproblem** (bzw. **Cauchy-Problem**) auf $U = \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

- Das **Anfangs-Randwertproblem** auf einem beschränkten Gebiet $U \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } U_T := U \times (0, T] \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T. \end{cases}$$

5.1 Lösungen mittels Produktansatz

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < \pi, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = u_0(x) & : 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = a(t), u(\pi, t) = b(t) & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Wir suchen eine Lösung mit Hilfe des **Produktansatzes**

$$u(x, t) = p(x) \cdot q(t).$$

Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung ergibt

$$p(x)\dot{q}(t) = q(t)p''(x)$$

und damit

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \quad \text{für } p(x) \neq 0 \text{ und } q(t) \neq 0.$$

Lösungen mittels Produktansatz

In der Gleichung

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \quad (p(x) \neq 0, q(t) \neq 0)$$

steht

- auf der **linken** Seite ein Term, der nur von t abhängt,
- auf der **rechten** Seite ein Term, der nur von x abhängt.

Daraus folgt

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} = \text{const.} =: -\delta$$

Wir erhalten also die beiden **gewöhnlichen** Differentialgleichungen

$$\dot{q}(t) + \delta q(t) = 0 \quad \text{und} \quad p''(x) + \delta p(x) = 0.$$

Lösungen mittels Produktansatz

Die **allgemeine Lösung** der Gleichung $\dot{q}(t) + \delta q(t) = 0$ ist gegeben durch

$$q(t) = c_0 e^{-\delta t}.$$

Die **Lösung** der Gleichung $p''(x) + \delta p(x) = 0$ hängt von der Konstanten δ ab:

- Für $\delta = 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 x + c_2.$$

- Für $\delta < 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 e^{-\sqrt{|\delta|x}} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|x}}.$$

- Für $\delta > 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x).$$

□

Lösungen mittels Produktansatz

Ohne Berücksichtigung der vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen erhalten wir über den Produktansatz folgende Lösungsklassen.

$$u(x, t) = c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 x + c_2)$$

$$u(x, t) = c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 e^{-\sqrt{|\delta|x}} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|x}})$$

$$u(x, t) = c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)).$$

Die vorgegebenen Anfangs- und Randbedingungen lauten

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u(0, t) = a(t), \quad u(\pi, t) = b(t).$$

Fazit: Die Parametermenge $\{c_0, c_1, c_2, \delta\}$ kann gegebene Anfangs- und Randdaten $u_0(x)$, $a(t)$, $b(t)$ im Allgemeinen *nicht* beschreiben. Der Produktansatz liefert nur bei speziellen Anfangs- und Randbedingungen eine explizite Lösung. □

Ein Beispiel zum Produktansatz

Beispiel: Gegeben sei das eindimensionale Anfangs-Randwertproblem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < \pi, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = \sin x & : 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Aufgrund der **vorgegebenen Randbedingungen** fallen grundsätzlich die ersten beiden Lösungsklassen aus. Es bleibt also

$$u(x, t) = c_0 e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta} x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta} x))$$

Wegen der Vorgabe $u(x, 0) = \sin x$ erhalten wir die Lösung

$$u(x, t) = e^{-t} \sin x$$

Das Beispiel sieht etwas künstlich aus, ist es aber nicht!

Das Superpositionsprinzip

Jede Lösung der Form

$$u(x, t) = b_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

erfüllt die **homogenen** Randbedingungen $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$.

Eine **Überlagerung**

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

ergibt die Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

Für eine gegebene Anfangsbedingung $u_0(x)$ ist die rechte Seite eine Entwicklung in eine **Fourier-Reihe**, d.h.

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

5.2 Die Fundamentallösung

Definition: Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{x}\|^2}{4t}} & : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}$$

heißt **Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung**. □

Insbesondere ist die Fundamentallösung **normiert**, d.h. für alle $t > 0$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 1.$$

Bemerkung: Die Fundamentallösung besitzt für $t = 0$ und $\mathbf{x} = 0$ eine Singularität. Mit $\Phi(\mathbf{x}, t)$ lässt sich eine Lösung für das **Cauchy-Problem** angeben:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases}$$

Lösung des Cauchy-Problems

Mit Hilfe von $\Phi(x, t)$ lässt sich für das **Cauchy-Problem**

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

eine Lösungsdarstellung wieder in der Form eines Faltungsintegrals angeben:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y, t) g(y) dy \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|x-y\|^2}{4t}} g(y) dy \end{aligned}$$

Zur **Herleitung** der Fundamentallösung für $x \in \mathbb{R}$: Ist $u(x, t)$ eine Lösung von $u_t = \Delta u$, so ist $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung. □

Herleitung der Fundamentallösung für $x \in \mathbb{R}$

Ist $u(x, t)$ eine Lösung von $u_t = \Delta u$, so ist $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

Ansatz: Wir suchen daher eine **spezielle Lösung** in der Form

$$u(x, t) = \frac{1}{t^{1/2}} v\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right).$$

Man berechnet nun

$$\begin{aligned} u_t(x, t) &= -\frac{1}{2} t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot t^{-1/2} v' \\ u_x(x, t) &= t^{-1/2} \cdot t^{-1/2} \cdot v' \\ u_{xx}(x, t) &= t^{-3/2} \cdot v''. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = -\frac{1}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-2} \cdot v' - t^{-3/2} \cdot v'' = 0.$$

Fortsetzung der Herleitung

Wir erhalten also mit $r = x/\sqrt{t}$ die Gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{1}{2}v + \frac{r}{2}v' + v'' = 0.$$

Umschreiben ergibt

$$(v')' + \frac{1}{2}(rv)' = 0 \quad \Rightarrow \quad v' + \frac{1}{2}rv = c \in \mathbb{R}.$$

Nehmen wir nun folgende Grenzbeziehungen an

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} v'(r) = 0,$$

so folgt $c = 0$, und die Gleichung lautet

$$v' = -\frac{1}{2}rv \quad \Rightarrow \quad v(r) = be^{-r^2/4}.$$

Eine explizite Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist damit

$$\Phi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Lösungsdarstellung mit der Fundamentallösung

Satz: Das **inhomogene** Anfangswertproblem mit **homogenen** Anfangsbedingungen

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t - s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2}{4(t - s)}} f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds. \end{aligned}$$

Mit dem **Duhamel'schen Prinzip** läßt sich dann auch eine Lösung des inhomogenen Cauchy-Problems mit allgemeinen Anfangsbedingungen angeben.

Das Duhamel'sche Prinzip

Satz: Die Funktion

$$u(\mathbf{x}, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y}$$

löst das Problem

$$\begin{cases} u_t(\cdot; s) - \Delta u(\cdot; s) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s, \infty) \\ u(\cdot; s) = f(\cdot; s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = s\} \end{cases}$$

Man erhält dann die Lösung der **inhomogenen** Gleichung durch Integration über s :

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t u(\mathbf{x}, t; s) ds.$$

Das inhomogene Anfangswertproblem mit **allgemeinen Anfangsbedingungen** $u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$ besitzt daher die Lösung

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds.$$

5.3 Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Analog zur Laplace-Gleichung erfüllen Lösungen der Wärmeleitungsgleichung **Mittelwertformeln**, die allerdings weniger anschaulich sind:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ fest. Dann nennt man die Menge

$$U_T := U \times (0, T]$$

den **parabolischen Zylinder** und

$$\Gamma_T := \overline{U_T} \setminus U_T$$

den **parabolischen Rand**.

Für festes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ gegeben durch

$$E(\mathbf{x}, t; r) := \left\{ (\mathbf{y}, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t, \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \geq \frac{1}{r^n} \right\}.$$

Mittelwerteigenschaft der Wärmeleitungsgleichung

Bemerkung:

- Der Rand von $E(\mathbf{x}, t; r)$ ist gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$.
- Man nennt die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ auch **Wärmekugel** (engl.: **heat ball**).

Mit Hilfe von $E(\mathbf{x}, t; r)$ erhält man folgende **Mittelwerteigenschaft**.

Satz: Ist $u \in \mathcal{C}_1^2(U_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int_{E(\mathbf{x}, t; r)} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t - s)^2} u(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y} ds$$

für jede Menge $E(\mathbf{x}, t; r) \subset U_T$. □

Aus der Mittelwerteigenschaft kann man wie bei der Laplacegleichung **Maximumprinzipien** herleiten.

Maximumprinzipien der Wärmeleitungsgleichung

Aus der Mittelwerteigenschaft kann man folgende Maximumprinzipien herleiten.

Satz: Sei $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in U_T . Dann gilt

- Das Maximum von $u(\mathbf{x}, t)$ liegt stets auf dem **parabolischen Rand**, d.h.

$$\max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{U}_T} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \Gamma_T} u(\mathbf{x}, t)$$

- Ist U zusammenhängend und existiert ein Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0) \in U_T$ mit

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{U}_T} u(\mathbf{x}, t)$$

so folgt, dass u auf $\overline{U}_{t_0}$ **konstant** ist.

□

Wärmeleitungsgleichung: Eindeutigkeit der Lösung

Satz: Das Anfangsrandwertproblem auf dem beschränkten Gebiet U

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } U_T \\ u = g & \text{auf } \Gamma_T \end{cases}$$

mit stetigen Funktionen f und g besitzt **maximal** eine Lösung u in $\mathcal{C}_1^2(U_T) \cap \mathcal{C}(\overline{U_T})$.

Beweis: Sind u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen, so lösen die beiden Funktionen

$$w_{1/2} = \pm(u - \tilde{u})$$

die homogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen. Nach dem Maximumprinzip gilt dann, dass $w_{1/2}$ **identisch** verschwinden, d.h. es gilt $u \equiv \tilde{u}$. ■

Das Anfangswertproblem auf dem Vollraum $\mathbb{R}^n$

Satz: Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = g & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

auf dem Vollraum $\mathbb{R}^n$ mit stetigen Funktionen f und g besitzt unter der **zusätzlichen Wachstumsbedingung**

$$|u(x, t)| \leq Ae^{a|x|^2} \quad \text{mit } A, a > 0$$

maximal eine Lösung $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$. □

Beispiel: In der Tat kann man zeigen, dass für das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_t = \Delta u & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u = 0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

unendlich viele Lösungen existieren. Nur die Nulllösung erfüllt die angegebene Wachstumsbedingung; alle anderen Lösungen wachsen rapide an. □

6 Die Wellengleichung

In diesem Kapitel berechnen wir Lösungen der **Wellengleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

sowie der **inhomogenen Wellengleichung**

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

unter Vorgabe geeigneter Anfangs- und/oder Randbedingungen. Dabei bezeichnet $t > 0$ die **Zeitvariable** und $\mathbf{x} \in U$, für $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, die **Ortsvariable**.

Wir suchen also eine Funktion $u : \bar{U} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, wobei der Laplace-Operator auf die Ortsvariable $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ wirkt.

Für die inhomogene Gleichung bezeichnet die rechte Seite $f = f(\mathbf{x}, t)$ eine gegebene Funktion $f : U \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

6.1 Die Formel von d'Alembert

Wir untersuchen zunächst eine **direkte** Methode zur Lösung des eindimensionalen Anfangswertproblems

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{cases}$$

wobei g, h vorgegebene Anfangsbedingungen sind.

Erste Beobachtung: Die Differentialgleichung lässt sich wie folgt faktorisieren.

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Setzen wir nun

$$v(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t),$$

so erhalten wir eine **Transportgleichung mit konstanten Koeffizienten**

$$v_t(x, t) + v_x(x, t) = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$v(x, t) = a(x - t)$$

und erfüllt die Anfangsbedingung

$$v(x, 0) = a(x).$$

Wegen

$$v(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \right) u(x, t)$$

ist $u(x, t)$ demnach die Lösung der **inhomogenen Transportgleichung**

$$u_t - u_x = a(x - t).$$

□

Herleitung der Formel von d'Alembert

Nach den Methoden aus Kapitel 2 erhalten wir

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^t a(x + (t - s) - s) ds + u(x + t, 0) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + u(x + t, 0) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} a(y) dy + g(x + t) \end{aligned}$$

Diese Lösung soll nun die **Anfangsbedingung**

$$u_t(x, 0) = h(x)$$

erfüllen. Man berechnet

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2} (a(x + t) + a(x - t)) + g'(x + t).$$

Fortsetzung der Herleitung

Man berechnet

$$u_t(x, t) = \frac{1}{2} (a(x + t) + a(x - t)) + g'(x + t)$$

und damit

$$u_t(x, 0) = a(x) + g'(x) = h(x) \quad \Rightarrow \quad a(x) = h(x) - g'(x).$$

Also folgt

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} (h(y) - g'(y)) dy + g(x + t) \\ &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy - \frac{1}{2} g(x + t) + \frac{1}{2} g(x - t) + g(x + t) \end{aligned}$$

Damit haben wir eine **explizite** Lösung der Wellengleichung berechnet.

Komplettierung der Lösungsformel von d'Alembert

Wir erhalten aus der Beziehung

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy - \frac{1}{2} g(x+t) + \frac{1}{2} g(x-t) + g(x+t)$$

demnach

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy.$$

Diese Darstellung nennt man die **Formel von d'Alembert**.

Bemerkung: Damit diese Lösung $u(x, t)$ tatsächlich eine **differenzierbare** Lösung der Wellengleichung ist, müssen wir bezüglich der Anfangsbedingungen die Bedingungen

$$g \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h \in C^1(\mathbb{R})$$

fordern. □

Ein Beispiel zur Formel von d'Alembert

Beispiel: Wir betrachten das Cauchy-Problem

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty) \\ u = \sin x, u_t = \cos x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Nach der Formel von d'Alembert ergibt sich:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (\sin(x + t) + \sin(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \cos(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (\sin(x + t) + \sin(x - t)) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\sin(x + t) - \sin(x - t)) \\ &= \sin(x + t). \end{aligned}$$

□

Die Reflektionsmethode für $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem auf dem **Halbraum** $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$

mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $g(0) = h(0) = 0$.

Frage: Können wir die Lösung des Halbraumproblems mit Hilfe der Lösung eines Ganzraumproblems berechnen?

Idee: Erweitere das Halbraumproblem auf ein Ganzraumproblem und verwende die Formel von d'Alembert. Definiere eine Funktion $\tilde{u}(x, t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$:

$$\tilde{u}(x, t) := \begin{cases} u(x, t) & \text{für } x \geq 0, t \geq 0 \\ -u(-x, t) & \text{für } x \leq 0, t \geq 0. \end{cases}$$

Fortsetzung der Reflektionsmethode

Analog werden die gegebenen Anfangsdaten **reflektiert**:

$$\begin{aligned}\tilde{g}(x) &:= \begin{cases} g(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -g(-x) & \text{für } x \leq 0 \end{cases} \\ \tilde{h}(x) &:= \begin{cases} h(x) & \text{für } x \geq 0 \\ -h(-x) & \text{für } x \leq 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für die Funktion $\tilde{u}$ das **Anfangswertproblem**

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ \tilde{u} = \tilde{g}, \tilde{u}_t = \tilde{h} & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

und nach der Lösungsformel nach d'Alembert gilt

$$\tilde{u}(x, t) = \frac{1}{2} (\tilde{g}(x + t) + \tilde{g}(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy.$$

Fortsetzung der Reflektionsmethode

Für $x \geq 0$ gilt per Definition

$$u(x, t) = \tilde{u}(x, t).$$

In der Formel von d'Alembert ist aber eine **Fallunterscheidung** nötig.

Fall 1: Ist $x \geq t \geq 0$, so folgt $x - t \geq 0$ und daher

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (\tilde{g}(x + t) + \tilde{g}(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy \\ &= \frac{1}{2} (g(x + t) + g(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy \end{aligned}$$

denn für positive Argumente stimmen die Funktionen g und $\tilde{g}$ beziehungsweise h und $\tilde{h}$ überein.

Fall 2: Ist $0 \leq x \leq t$, so folgt $x - t \leq 0$ und daher

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \frac{1}{2} (\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y) dy \\
 &= \frac{1}{2} (g(x+t) - g(-(x-t))) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^0 \tilde{h}(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} \tilde{h}(y) dy \\
 &= \frac{1}{2} (g(x+t) - g(t-x)) - \frac{1}{2} \int_0^{t-x} h(y) dy + \frac{1}{2} \int_0^{x+t} h(y) dy \\
 &= \frac{1}{2} (g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{t-x}^{x+t} h(y) dy.
 \end{aligned}$$

Komplettierung der Reflektionsmethode

Gesamtlösung: Wir erhalten also als Lösung des **Ausgangsproblems**

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy & \text{für } x \geq t \geq 0 \\ \frac{1}{2} (g(x+t) - g(t-x)) + \frac{1}{2} \int_{-x+t}^{x+t} h(y) dy & \text{für } 0 \leq x \leq t \end{cases}$$

Beispiel: Die Lösung des **Anfangsrandwertproblems**

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ u = 0, u_t = \sin x & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{cases}$$

lautet

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (\cos(x-t) - \cos(x+t)).$$

6.2 Lösung der Wellengleichung durch sphärische Mittelung

Wir betrachten nun den höherdimensionalen Fall $n \geq 2$ und suchen eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, \infty) \\ u = g, u_t = h & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Idee: Leite durch geeignete **sphärische Mittelungen** eine vereinfachte Differentialgleichung ab, die dann eine explizite Lösungsformel für die höherdimensionale Wellengleichung liefert.

Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definieren wir den **Mittelwert** von $u(x, t)$ über die Kugel $\partial B(x, r)$,

$$U(x; r, t) := \int_{\partial B(x, r)} u(y, t) dS(y).$$

Lösung durch sphärische Mittelung

Weiter sei

$$\begin{cases} G(x; r) &:= \int_{\partial B(x, r)} g(y) dS(y) \\ H(x; r) &:= \int_{\partial B(x, r)} h(y) dS(y) \end{cases}$$

Satz: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und u eine Lösung der obigen Wellengleichung. Dann löst $U(x; r, t)$ die **Euler-Poisson-Darboux Gleichung** (kurz: **EPD Gleichung**)

$$\begin{cases} U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ U = G, U_t = H & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Beweis: Nach einer früheren Beobachtung aus Abschnitt 4.2 gilt

$$U_r(x; r, t) = \frac{r}{n} \int_{B(x, r)} \Delta u(y, t) dy.$$

Fortsetzung des Beweises

Da u eine Lösung der **Wellengleichung** ist, folgt

$$u_r(x; r, t) = \frac{r}{n} \int_{B(x, r)} u_{tt}(y, t) dy$$

und damit

$$r^{n-1} u_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(x, r)} u_{tt} dy.$$

Daraus folgt aber

$$(r^{n-1} u_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x, r)} u_{tt} dS = r^{n-1} \int_{\partial B(x, r)} u_{tt} dS = r^{n-1} u_{tt}.$$

Fassen wir dieses Ergebnis zusammen, so löst u in der Tat die **EPD-Gleichung**

$$u_{tt} - u_{rr} - \frac{n-1}{r} u_r = 0.$$



Die Kirchhoffsche Formel für $n = 3$

Satz: Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung in **drei Dimensionen** lautet

$$u(x, t) = \int_{\partial B(x, t)} (th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x)) dS(y)$$

mit $x \in \mathbb{R}^3$ und $t > 0$.

Beweis: Die Herleitung erfolgt über die Euler-Poisson-Darboux Gleichung:

Wir definieren zunächst

$$\tilde{U} := rU, \quad \tilde{G} := rG, \quad \tilde{H} := rH.$$

Dann gilt

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r \left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r \right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}.$$

Fortsetzung des Beweises

Also löst $\tilde{U}$ das **Anfangswertproblem**

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty) \\ \tilde{U} = \tilde{G}, \tilde{U}_t = \tilde{H} & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U} = 0 & \text{auf } \{r = 0\} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Mit der Lösungsformel für das **Halbraumproblem** folgt für $0 \leq r \leq t$ die Darstellung

$$\tilde{U}(x; r, t) = \frac{1}{2} [\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)] + \frac{1}{2} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy$$

Da $U(x; r, t)$ aus $u(x, t)$ durch **spärliche Mittelung** entsteht, gilt

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(x; r, t).$$

Fortsetzung des Beweises

Mit der Definition von $\tilde{U}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\tilde{U}(x; r, t)}{r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{\tilde{G}(r + t) - \tilde{G}(t - r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y) dy \right) \\ &= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t) \end{aligned}$$

Verwendet man die Definitionen von G und H , so erhält man

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} (tG(x; t)) + tH(x; t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(t \oint_{\partial B(x, t)} g dS \right) + t \oint_{\partial B(x, t)} h dS. \end{aligned}$$

Komplettierung des Beweises

Nun gilt

$$\oint_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) = \oint_{\partial B(0,1)} g(x + tz) dS(z)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\oint_{\partial B(x,t)} g dS \right) &= \oint_{\partial B(0,1)} Dg(x + tz) \cdot z dS(z) \\ &= \oint_{\partial B(x,t)} Dg(y) \cdot \left(\frac{y - x}{t} \right) dS(y). \end{aligned}$$

Setzen wir dies in dies in die letzte Gleichung auf der vorgehenden Seite ein, so erhalten wir – **nach Umsortierung** – die Kirchhoffsche Formel:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \oint_{\partial B(x,t)} t Dg(y) \cdot \left(\frac{y - x}{t} \right) dS(y) \\ &\quad + \oint_{\partial B(x,t)} g(y) dS(y) + \oint_{\partial B(x,t)} t h dS(y). \end{aligned}$$

Die Poissonsche Formel für $n = 2$

Satz: Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung in **zwei Dimensionen** lautet:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{B(x, t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + tDg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy$$

für $x \in \mathbb{R}^2$ und $t > 0$.

Beweisidee: Um diese Lösungsdarstellung abzuleiten, betrachtet man das **dreidimensionale Anfangswertproblem** und nimmt zusätzlich an, dass die Lösung **nicht** von der dritten Ortskoordinate x_3 abhängt. □

Bemerkung: Nach einem zur Herleitung der Kirchhoffschen Formel analogen Prinzip, d.h. unter Verwendung der Euler-Poisson-Darboux Gleichung und geeigneten Definition von $\tilde{U}$, lassen sich Lösungsformeln für das Anfangswertproblem der Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$ ableiten. □

7 Fourier-Methoden

Wir untersuchen allgemeine Fourier-Methoden zur (approximativen) Lösung von Anfangs-, Randwert- und Anfangsrandwertaufgaben.

7.1 Beispiel: Fourier-Methoden bei gewöhnlichen DGLs

Gegeben sei das eindimensionale Randwertproblem:

$$\begin{aligned} -T \frac{d^2 u}{dx^2} &= f(x) \quad \text{für } 0 < x < l \\ u(0) &= 0 \\ u(l) &= 0 \end{aligned}$$

Anwendung: Die Lösung u beschreibt die **Gleichgewichtslage** eines eingespannten hängenden Seils mit Spannung T und extern angreifender Kraft f .

Fourier-Methoden bei gewöhnlichen DGLs

Wir betrachten zunächst den **Spezialfall**

$$f(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit vorgegebenen Koeffizienten $c_1, \dots, c_N$.

Die Inhomogenität $f(x)$ erfüllt insbesondere die homogenen Randbedingungen

$$f(0) = f(l) = 0$$

und wir suchen daher eine Lösung des Randwertproblems in der Form

$$u(x) = \sum_{n=1}^N b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Damit sind die homogenen Randbedingungen für **beliebige**

Lösungskoeffizienten $b_1, \dots, b_N \in \mathbb{R}$ erfüllt und wir versuchen diese

Koeffizienten so zu bestimmen, dass u eine Lösung der vorgegebenen DGL ist.

Fourier-Methoden bei gewöhnlichen DGLs

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$\sum_{n=1}^N \frac{T n^2 \pi^2}{l^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Für die Koeffizienten $b_1, \dots, b_N$ gilt also

$$b_n = \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2}, \quad n = 1, \dots, N$$

und wir erhalten demnach als Lösung des Randwertproblems

$$u(x) = \sum_{n=1}^N \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Für die Inhomogenität $f(x) = \sin(\pi x) - 2 \sin(2\pi x) + 5 \sin(3\pi x)$ und $l = T = 1$ lautet die Lösung

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2} \sin(\pi x) - \frac{1}{2\pi^2} \sin(2\pi x) + \frac{5}{9\pi^2} \sin(3\pi x).$$

Fourier-Methoden bei gewöhnlichen DGLs

Der allgemeine Fall: Approximiere $f(x)$ durch eine **endliche Fourier-Reihe**

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^N c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit den **Fourier-Koeffizienten**

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx \quad \text{für } n = 1, \dots, N$$

Erinnerung (Analysis II): Eine **approximative Lösung** des Randwertproblems mit Inhomogenität $f(x)$ ist dann gegeben durch

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Fourier-Methoden bei gewöhnlichen DGLs

Beispiel: Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\frac{d^2 u}{dx^2} &= x, & 0 < x < 1 \\ u(0) &= 0 \\ u(1) &= 0 \end{aligned}$$

Die exakte Lösung läßt sich durch **Integration** berechnen:

$$u'(x) = -\frac{x^2}{2} + a \quad \Longrightarrow \quad u(x) = -\frac{x^3}{6} + ax + b$$

Mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ folgt

$$u(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(1 - x^2).$$

Fourier-Methoden bei gewöhnlichen DGLs

Wir berechnen nun zunächst die Fourier-Koeffizienten der Funktion

$$f(x) = x$$

also

$$c_n = 2 \int_0^1 x \sin(n\pi x) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Damit ergibt sich eine **approximative** Lösung in der Form

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{n^2 \pi^2} \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^N \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3 \pi^3} \sin(n\pi x).$$

Zum Beispiel erhalten wir

$$u_4(x) = \frac{2}{\pi^3} \sin(\pi x) - \frac{1}{4\pi^3} \sin(2\pi x) + \frac{2}{27\pi^3} \sin(3\pi x) - \frac{1}{32\pi^3} \sin(4\pi x).$$

Fourier-Methoden bei gewöhnlichen DGLs

Frage: Wie gut ist die approximative Lösung?

Antwort: Berechne dazu die Fourier-Koeffizienten der exakten Lösung

$$u(x) = \frac{1}{6}x(1 - x^2).$$

Mit der Fourier-Reihe

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin(n\pi x)$$

erhalten wir für die Fourier-Koeffizienten die Darstellung

$$a_n = 2 \int_0^1 \frac{1}{6}x(1 - x^2) \sin(n\pi x) dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}.$$

Dies sind aber gerade die Fourier-Koeffizienten der **approximativen** Lösung!

7.2 Fourier-Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten folgendes Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

und suchen eine Lösung in Form einer Fourier-Reihe, also

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Bemerkung: Da wir nur Sinus-Funktionen in der Fourier-Reihe verwenden, sind die vorgegebenen homogenen Randbedingungen **automatisch** erfüllt.

Fourier-Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Für die **Fourier-Koeffizienten** der Fourier-Reihe gilt wiederum

$$a_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Gleichzeitig können wir die **Inhomogenität** $f(x, t)$ in einer Fourier-Reihe darstellen

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit

$$c_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

Wir berechnen nun die **Orts-- und Zeitableitungen** des Lösungsansatzes:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Fourier-Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Die Berechnung der **Orts- und Zeitableitungen** ergibt

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Fourier-Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Durch Gleichsetzen mit der Fourier-Reihe von $f(x, t)$ erhalten wir ein **System gewöhnlicher Differentialgleichungen** der Form

$$\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = c_n(t)$$

Die **Anfangsbedingungen** $a_1(0), a_2(0), \dots$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung $u(x, 0) = g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx$$

und daher gilt

$$a_n(0) = b_n \quad \text{für } n = 1, 2, \dots$$

Damit erhalten wir ein **Anfangswertproblem** für ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das zudem **entkoppelt** ist.

Fourier-Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Die Lösung lässt sich also direkt angeben:

$$a_n(t) = b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} \cdot t\right) + \int_0^t \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} \cdot (t-s)\right) c_n(s) ds.$$

Beispiel: Wir betrachten das **homogene Anfangsrandwertproblem**

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 50, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25| & : 0 \leq x \leq 50 \\ u(0, t) = u(50, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Die Berechnung der **Fourier-Koeffizienten** von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25|$ ergibt

$$b_n = \frac{1}{25} \int_0^{50} \left(5 - \frac{1}{5}|x - 25|\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx = \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Fortsetzung des Beispiels

Da wir eine **homogene** Wärmeleitungsgleichung betrachten, folgt

$$a_n(t) = \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right)$$

und die Lösung als **Fourier-Reihe** lautet

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

Beobachtung:

- Für festes $T > 0$ fallen die Fourier-Koeffizienten $a_n(t)$ der Lösung **exponentiell** für $n \rightarrow \infty$ ab. Höhere Werte für n beschreiben gerade die **höheren Frequenzen** in der Lösung.
- Für festes n fallen die Fourier-Koeffizienten **exponentiell** für $t \rightarrow \infty$ ab. Das Abklingen ist umso schneller, je größer n ist. Für große Zeiten beschreiben **wenige Terme** der Fourier-Reihe die exakte Lösung sehr gut.

Ein weiteres Beispiel

Wir betrachten das **inhomogene** Anfangsrandwertproblem

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = x & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 0 & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen von oben

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ c_n(t) &= c_n = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} \end{aligned}$$

und damit

$$a_n(t) = 2 \int_0^t e^{-n^2 \pi^2 (t-s)} \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} ds = 2 \frac{(-1)^{n+1}}{n^3 \pi^3} \left(1 - e^{-n^2 \pi^2 t} \right).$$

Allgemeinere Randbedingungen

Bis jetzt haben wir nur Anfangsrandwertprobleme mit **homogenen** Randbedingungen betrachtet,

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Frage: Was passiert bei

- einseitig **Neumannschen** Randbedingungen der Form

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0 ?$$

- **periodischen** Randbedingungen der Form

$$u(0, t) = u(l, t), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) ?$$

Neumannsche Randbedingungen

Wir betrachten zunächst das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T. \end{array} \right.$$

Bemerkung: Beschreibt die Funktion $u(x, t)$ eine orts- und zeitabhängige Temperaturverteilung, so bedeutet

- die Bedingung $u(0, t) = 0$, dass das linke Ende des Intervalls $[0, l]$ mit einem unendlich großen Eisbad in Kontakt steht,
- die Bedingung $u_x(l, t) = 0$, dass am rechten Ende kein Wärmefluss nach rechts existiert, d.h. das rechte Ende des Intervalls ist **perfekt wärmeisoliert**.

Neumannsche Randbedingungen

Die Fourier-Reihe

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

kann **keine** Lösung sein, denn unabhängig von den (zeitabhängigen) Koeffizienten gilt dann stets

$$u(0, t) = u(l, t) = 0.$$

Alternativer Ansatz: Die im Problem vorgegebenen Randbedingungen

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0$$

werden zum Beispiel durch die Funktion

$$u(x, t) = \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

erfüllt.

Neumannsche Randbedingungen

Diese Funktion beschreibt gerade eine **Viertel-Sinuswelle**.

Funktionen mit höheren Frequenzen erhalten wir, wenn wir daran Vielfache einer **halben Sinuswelle** anhängen, also

$$\sin \left(\frac{\pi x}{2l} + \frac{k\pi x}{l} \right) \quad \text{mit } k \in \mathbb{N}.$$

Die Funktionen **höherer Frequenzen** sind dann von der Form

$$u(x, t) = \sin \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right) \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}. \quad n \geq 2.$$

Ein **Lösungsansatz** für das vorgegebene Anfangsrandwertproblem, der automatisch die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt, lautet damit

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right).$$

Beispiel: Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 50, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25| & : 0 \leq x \leq 50 \\ u(0, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(50, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

Die Berechnung der **Fourier-Koeffizienten** von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25|$ ergibt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{25} \int_0^{50} \left(5 - \frac{1}{5}|x - 25| \right) \sin \left(\frac{(2n-1)\pi x}{100} \right) dx \\ &= -\frac{80(-\sqrt{2} \sin(n\pi/2) + \sqrt{2} \cos(n\pi/2) - (-1)^n)}{\pi^2 \cdot (2n-1)^2} \end{aligned}$$

Fortsetzung des Beispiels

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l} \right)$$

erhalten wir durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung und **Koeffizientenvergleich** mit der Fourier-Reihe von $g(x)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dt} + \frac{(2n-1)^2 \pi^2}{4 \cdot 50^2} a_n &= 0 \\ a_n(0) &= b_n \end{aligned}$$

für $n = 1, 2, \dots$

Die **Lösung** dieser Differentialgleichung lautet dann

$$a_n(t) = b_n e^{-\frac{(2n-1)^2 \pi^2}{10000} t}.$$

Beidseitige Neumann-Randbedingungen

Sind **beide Enden** wärmeisoliert, so haben wir das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_x(0, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T. \end{array} \right.$$

Jetzt erfüllen die Funktionen

$$u(x, t) = 1 \quad \text{und} \quad u(x, t) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

die vorgegebenen Neumannschen Randbedingungen.

Ein **Lösungsansatz** lautet damit

$$u(x, t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Beispiel

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 50, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25| & : 0 \leq x \leq 50 \\ u_x(0, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(50, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

Mit dem **Lösungsansatz**

$$u(x, t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

ergibt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\frac{db_0}{dt}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2} b_n(t) \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) = 0.$$

Fortsetzung des Beispiels

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet dann

$$\frac{db_0}{dt}(t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2} b_n(t) = 0$$

Um die zugehörigen **Anfangsbedingungen** festzulegen, bestimmen wir die Fourier-Reihe der Anfangsbedingung $g(x)$, d.h.

$$g(x) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$d_0 = \frac{1}{50} \int_0^{50} g(x) dx$$

$$d_n = \frac{2}{50} \int_0^{50} g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx$$

Komplettierung des Beispiels

Man berechnet

$$d_0 = \frac{5}{2}$$

$$d_n = \frac{20(2 \cos(n\pi/2) - 1 - (-1)^n)}{n^2 \pi^2}$$

Die Koeffizienten $b_0(t), b_1(t), \dots$ ergeben sich damit als

$$b_n(t) = d_n e^{-\lambda_n t}$$

mit

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{2500}$$

und die Lösung lautet

$$u(x, t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right).$$

Periodische Randbedingungen

Wir betrachten **periodische** Randbedingungen und das folgende Anfangsrandwertproblem auf dem **Intervall** $[-l, l]$:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : -l < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : -l \leq x \leq l \\ u(-l, t) = u(l, t) & : 0 \leq t \leq T \\ u_x(-l, t) = u_x(l, t) & : 0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall $[-l, l]$ sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \quad \text{und} \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Ein **Lösungsansatz** mit Hilfe von Fourier-Reihen ist damit

$$u(x, t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right).$$

Periodische Randbedingungen

Mit den Reihenentwicklungen

$$f(x, t) = c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + d_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

$$g(x) = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(p_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + q_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right)$$

ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{da_0}{dt}(t) = c_0(t)$$

$$\frac{da_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2} a_n(t) = c_n(t)$$

$$\frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2} b_n(t) = d_n(t).$$

Periodische Randbedingungen

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten

$$a_0(0) = p_0, \quad a_n(0) = p_n, \quad b_n(0) = q_n$$

Beispiel: Für das Anfangsrandwertproblem mit periodischen Randbedingungen

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t - u_{xx} &= \frac{1}{10}x(x^2 - \pi^2) \quad : \quad -\pi < x < \pi, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) &= 25 \quad : \quad -\pi \leq x \leq \pi \\ u(-\pi, t) &= u(\pi, t) \quad : \quad 0 \leq t \leq T \\ u_x(-\pi, t) &= u_x(\pi, t) \quad : \quad 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

ist die Fourier-Entwicklung der Lösung gegeben durch

$$u(x, t) = 25 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{10n^5} \left(1 - e^{-n^2 t}\right) \sin(nx).$$

7.3 Fourier-Methoden für die Wellengleichung

Wir betrachten das **Anfangsrandwertproblem**

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = h(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

und suchen eine Lösung in der Form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Die Fourier-Reihen für $f(x, t)$, $g(x)$ und $h(x)$ ergeben DGLs für die Lösungskoeffizienten $a_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$

Beispiel: Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - u_{xx} = 0 & : 0 < x < l, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u_t(x, 0) = h(x) & : 0 \leq x \leq l \\ u(0, t) = u(l, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{array} \right.$$

ist gegeben durch

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n \cos\left(\frac{n\pi}{l}t\right) + \frac{d_n l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Dabei sind b_n die Fourier-Koeffizienten der Entwicklung der vorgegebenen Anfangsbedingung $u(x, 0) = g(x)$ und d_n die entsprechenden Koeffizienten von $u_t(x, 0) = h(x)$.

8 Numerische Lösungsmethoden

Zur numerischen Lösung gibt es **drei** klassische Ansätze:

- **Finite Differenzen**

Approximation auf regulären (strukturierten) Gittern, einfache Geometrien, häufig eindimensional im Ort, alle Typen.

- **Finite Volumen**

Mehrdimensionale Probleme auf unstrukturierten Gittern, vor allem hyperbolische Gleichungen

- **Finite Elemente**

Mehrdimensionale Probleme auf unstrukturierten Gittern, komplizierte Geometrien, vor allem elliptische Gleichungen

Wir beschränken uns hier auf die Darstellung von **Finite-Differenzen-** und **Finite-Elemente-Methoden**.

8.1 Die Methode der Finiten Differenzen

Wir beschränken uns auf **eindimensionale** Probleme wie folgt.

- Cauchy-Probleme für **skalare Erhaltungsgleichungen**:

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

- Randwertprobleme für die **Poisson-Gleichung**:

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

- Anfangsrandwertprobleme für die **Wärmeleitungsgleichung**:

$$\begin{cases} u_t - u_{xx} = f(x, t) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

Die Methode der Finiten Differenzen

Grundidee: Approximiere die exakte Lösung *nur* an diskreten **Gitterpunkten**

$$u(x_i, t_j) \approx U(x_i, t_j) =: U_i^j$$

wobei

$$x_i = i \cdot h, \quad i \in \mathcal{Z}_x \quad \text{und} \quad t_j = j \cdot k, \quad j \in \mathcal{Z}_t$$

und mit den **Orts- und Zeitschrittweiten** h und k .

Die Indexmengen $\mathcal{Z}_x$ und $\mathcal{Z}_t$ sind endliche oder unendliche Teilmengen von $\mathbb{Z}$.

Beispiel: Für die Wärmeleitungsgleichung auf $[0, 1] \times [0, T]$ setzen wir

$$x_i = i \cdot h, \quad i = 0, \dots, n$$

$$t_j = j \cdot k, \quad j = 0, \dots, m$$

mit den Orts- und Zeitschrittweiten

$$h = \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad k = \frac{T}{m}.$$

Zur diskreten Approximation von Ableitungen

Zur Berechnung der diskreten Werte U_i^j benötigen wir die Approximation von Ableitungen auf dem vorgegebenen Gitter.

Beispiel: Wir approximieren die Ableitung $u_x(x, t)$ an der Stelle $(x, t) = (x_i, t_j)$ durch

- **zentrale Differenzen:**

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h}.$$

- **Vorwärtsdifferenz:**

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h}.$$

- **Rückwärtsdifferenz:**

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h}.$$

Zur Approximationsgüte von Finiten Differenzen

Sei $u(x, t)$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion und (x_i, t_j) ein fester Punkt eines Gitters mit Orts- und Zeitschrittweite h und k .

Mittels einer **Taylor-Entwicklung** um (x_i, t_j) erhalten wir

$$\begin{aligned}
 u(x_{i+1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{=h} + \\
 &\quad \frac{1}{2} u_{xx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6} u_{xxx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i+1} - x_i)^3}_{=h^3} + \dots \\
 u(x_{i-1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)}_{=-h} + \\
 &\quad \frac{1}{2} u_{xx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6} u_{xxx}(x_i, t_j) \underbrace{(x_{i-1} - x_i)^3}_{=-h^3} + \dots
 \end{aligned}$$

Zur Approximationsgüte von Finiten Differenzen

Wir erhalten damit

- bei **zentralen Differenzen**:

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{2h} \right| = O(h^2).$$

⇒ Approximation **zweiter** Ordnung in h .

- bei **Vorwärtsdifferenzen**:

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

⇒ Approximation **erster** Ordnung in h .

- bei **Rückwärtsdifferenzen**:

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

⇒ Approximation **erster** Ordnung in h .

Skalare Erhaltungsgleichungen

Wir betrachten das **Cauchy-Problem**

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Mit obigen Notationen ist ein numerisches Verfahren mit **Finiten Differenzen** gegeben durch

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{k}{2h} \left(f(u_{i+1}^j) - f(u_{i-1}^j) \right)$$

mit den **Anfangsbedingungen**

$$u_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_i - h/2}^{x_i + h/2} u_0(x) dx$$

FD Methode: Zentrale Differenz im Ort, Vorwärtsdifferenz in der Zeit. □

Beispiel: Wir betrachten das Problem

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : x \leq 0 \\ -1 & : x > 0 \end{cases}$$

Die Anfangsbedingung ist gleichzeitig die Lösung für $t > 0$.

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{k}{2h} \left(\frac{(u_{i+1}^j)^2}{2} - \frac{(u_{i-1}^j)^2}{2} \right)$$

$$u_i^0 = \begin{cases} 1 & : i < 0 \\ 0 & : i = 0 \\ -1 & : i > 0 \end{cases}$$

Beobachtung: Die FD Methode versagt, denn das Verfahren ist *instabil*. □

Beispiel: Wir betrachten die lineare Advektionsgleichung

$$\begin{cases} u_t + u_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Zentrale Differenzen im Ort:

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{k}{2h} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j)$$

Funktioniert selbst bei einer linearen Gleichung nicht!

Upwind-Verfahren: Funktioniert unter der CFL-Bedingung $k/h < 1$

$$u_i^{j+1} = u_i^j - \frac{k}{h} (u_i^j - u_{i-1}^j)$$

Lax-Friedrichs-Verfahren: Funktioniert wie das Upwind-Verfahren

$$u_i^{j+1} = \frac{u_{i+1}^j + u_{i-1}^j}{2} - \frac{k}{2h} (u_{i+1}^j - u_{i-1}^j).$$

Finite Differenzen für die Poisson-Gleichung

Wir betrachten jetzt Randwertprobleme für die **Poisson-Gleichung**:

$$\begin{cases} -u_{xx} = f(x) & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

Zunächst benötigen wir eine Approximation der **zweiten Ableitung**:

$$u_{xx}(x_i) \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

Damit erhalten wir die diskreten Gleichungen

$$\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = F_i, \quad i = 1, \dots, n-1$$

mit $h = 1/n$ und

$$F_i := f(x_i), \quad u_0 = u_n = 0.$$

Finite Differenzen für die Poisson-Gleichung

Setzen wir

$$\mathbf{x} = (u_1, \dots, u_{n-1})^T, \quad \mathbf{b} = (F_1, \dots, F_{n-1})^T$$

so erhalten wir das **lineare Gleichungssystem**

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Fazit: Die numerische Lösung der Poisson-Gleichung reduziert sich auf ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $u_1, \dots, u_{n-1}$. □

Finite Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung

Zur numerischen Lösung von Anfangsrandwertproblemen der Form

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & : 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ u(x, 0) = g(x) & : 0 \leq x \leq 1 \\ u(0, t) = u(1, t) = 0 & : 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

müssen wir Diskretisierungen für die zweite Ableitung u_{xx} mit einer Differenzenapproximation für die Zeitableitung u_t kombinieren.

Einfachste Möglichkeit: Setzen wir eine Vorwärtsdifferenz für die Zeitableitung an, also

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{k}$$

so erhalten wir das **explizite Verfahren**

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{k}{h^2} (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j).$$

Finite Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung

Mit der Rückwärtsdifferenz

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{k}$$

erhalten wir das **implizite Verfahren**

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{k}{h^2} (u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}).$$

Fazit: Zur Berechnung der Lösung zur Zeit t_{j+1} muss ein lineares Gleichungssystem gelöst werden!

Eine Konvexkombination beider Verfahren liefert die **θ -Methode**

$$u_i^{j+1} = u_i^j + \frac{k}{h^2} \left[\theta (u_{i+1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i-1}^{j+1}) + (1 - \theta) (u_{i+1}^j - 2u_i^j + u_{i-1}^j) \right].$$

Im Fall $\theta = \frac{1}{2}$ erhält man das **Crank-Nicholson-Verfahren**.

Finite Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung

Bemerkungen:

- Das explizite Verfahren funktioniert nur unter der **Stabilitätsbedingung**

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Verdoppelt man also die Zahl der Gitterpunkte im Ort, so muss man entsprechend mit einem vierfach kleineren Zeitschritt arbeiten.

- Das implizite Verfahren ist für alle Werte von k und h stabil. Zur Berechnung der Lösung muss man allerdings in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem lösen.
- Bei Verfahren sind **erster Ordnung in der Zeit** und **zweiter Ordnung im Ort**, d.h. für den Fehler $e(T)$ zwischen der exakten und der numerischen Lösung zu einer festen Zeit $T > 0$ gilt

$$e(T) = O(k) + O(h^2).$$

Finite Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung

Bemerkungen:

- Die **Stabilitätsbedingung** für die θ -Methode für $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ lautet

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}(1 - 2\theta)^{-1}.$$

Für $\theta \geq \frac{1}{2}$ ist die θ -Methode stets stabil.

- Das Verfahren von Crank-Nicholson ist zweiter Ordnung in Ort **und** Zeit, für den Fehler $e(T)$ gilt

$$e(T) = O(k^2) + O(h^2).$$

Für keinen anderen Wert von θ gilt dieses Resultat. Das Verfahren von Crank-Nicholson wird daher speziell für die Wärmeleitungsgleichung zur numerischen Lösung verwendet. □

8.2 Die Methode der Finiten Elemente

Wir beschränken uns auf das **eindimensionale Randwertproblem**:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x), & 0 < x < l, \quad k(x) > 0 \\ u(0) = u(l) = 0 \end{cases}$$

Wesentlicher Unterschied zu Finiten Differenzen: Man diskretisiert *nicht* die gegebene partielle Differentialgleichung, sondern die *Lösung* der Gleichung. Dazu wendet man drei Schritte an.

- Schwache Form oder Variationsformulierung,
- Galerkin-Methode,
- Approximation durch stückweise definierte Polynome.

Grundlegende Ideen Finite Elemente Methode

- Man reformuliert das gegebene Problem in einer **schwachen Form** oder auch **Variationsformulierung**. Dadurch reduziert sich das Problem auf unendlich viele algebraische Gleichungen in einem Vektorraum, dessen Elemente bereits die vorgegebenen Randwerte erfüllen.
- Die **Galerkin-Methode** reduziert das Problem auf Gleichungen in einem **endlich-dimensionalen** Finite-Elemente-Raum, der eine endliche Zahl von Basiselementen besitzt.
- Als Basis des endlich-dimensionalen Finite-Elemente-Raums wählt man z.B. **stückweise Polynome** und erhält damit ein lineares Gleichungssystem mit einer **dünn besetzten** Koeffizientenmatrix.

Schwache Form des Randwertproblems

Sei V gegeben durch

$$V = \{v \in \mathcal{C}^2[0, l] : v(0) = v(l) = 0\}$$

Wir multiplizieren nun die gegebene Poissongleichung mit einer Funktion $v \in V$ und integrieren über den Ortsraum $[0, l]$:

$$-\int_0^l \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) v(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

Da $v \in V$ eine beliebige Funktion ist, wird die *schwache Form* des Randwertproblems nun wie folgt beschrieben.

Schwache Form des Randwertproblems

Finde ein $u \in V$, sodass die Beziehung

$$\int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx = \int_0^l f(x)v(x) dx$$

für alle $v \in V$ erfüllt ist.

Man kann nun zeigen: Erfüllt $u \in V$ die Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right) = f(x),$$

so erfüllt u auch die schwache Form von oben, und (**wichtiger!**) es gilt ebenso die Umkehrung.

Fazit: Beide Darstellungen sind somit äquivalent.

Die Galerkin-Methode

Definieren wir

$$a(u, v) := \int_0^l k(x) \frac{du}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) dx,$$

so ist $a(\cdot, \cdot)$ eine **symmetrische Bilinearform**, die ein inneres Produkt im Vektorraum V darstellt. Mit dem Skalarprodukt

$$(f, v) = \int_0^l f(x) v(x) dx$$

lässt sich die schwache Form wie folgt formulieren:

Finde ein $u \in V$, sodass $a(u, v) = (f, v)$ für alle $v \in V$.

Die Idee der Galerkin-Methode ist nun den Vektorraum V durch einen endlich-dimensionalen Raum V_n , den **Finite-Elemente-Raum**, zu approximieren und dort folgendes Problem zu lösen:

Finde ein $v_n \in V_n$, so dass $a(v_n, v) = (f, v)$ für alle $v \in V_n$.

Die Galerkin-Methode

Das Problem

Finde ein $v_n \in V_n$, sodass $a(v_n, v) = (f, v)$ für alle $v \in V_n$

lässt sich auf ein **lineares Gleichungssystem** reduzieren: Sei dazu $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ eine Basis von V_n . Dann besitzt die Lösung v_n die Darstellung

$$v_n = \sum_{j=1}^n u_j \Phi_j.$$

Setzen wir diese Darstellung von v_n in die schwache Form ein, so gilt

$$a\left(\sum_{j=1}^n u_j \Phi_j, \Phi_i\right) = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Mit der Bilinearität von $a(\cdot, \cdot)$ folgt

$$\sum_{j=1}^n a(\Phi_j, \Phi_i) u_j = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Galerkin-Methode

Mit der Bilinearität von $a(\cdot, \cdot)$ folgt

$$\sum_{j=1}^n a(\Phi_j, \Phi_i) u_j = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Setzen wir für $i = 1, \dots, n$

$$a_{ij} = a(\Phi_j, \Phi_i), \quad f_i = (f, \Phi_i),$$

so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

mit der **Steifigkeitsmatrix** $\mathbf{A}$ und dem Lösungsvektor

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$$

mit den zu bestimmenden Koeffizienten $u_1, \dots, u_n$.

Zur Konstruktion von Finite-Elemente-Räumen

- Am besten wären Finite-Elemente-Räume V_n , für die man eine Orthogonalbasis aufstellen kann. Dann wäre die Steifigkeitsmatrix eine Diagonalmatrix. Dies ist aber im Allgemeinen nicht möglich.
- Findet man keine Orthogonalbasis, so sollten Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite *einfach* zu berechnen sein.
- Die Basis von V_n sollte *fast* orthogonal sein, denn dann wäre die Steifigkeitsmatrix nahe bei einer Diagonalmatrix und damit *dünn besetzt*.
- Die exakte Lösung u des Problems sollte *möglichst gut* durch ein Element aus V_n approximiert werden können und im Grenzwert $n \rightarrow \infty$ sollte die Approximation *beliebig gut* werden.

Eine beliebte Möglichkeit: Approximation durch stückweise Polynome, zum Beispiel durch eine stückweise *affin-lineare* Funktion. □