Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 7

Aufgabe 25:

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} && , \quad 0 < x < \pi \, , \; 0 < t \, , \\ u(0,t) &= 0 \;=\; u(\pi,t) && , \quad t \geq 0 \, , \\ u(x,0) &= u_0(x) && , \quad 0 \leq x \leq \pi \, , \\ u_t(x,0) &= 0 && , \quad 0 \leq x \leq \pi \, . \end{aligned}$$

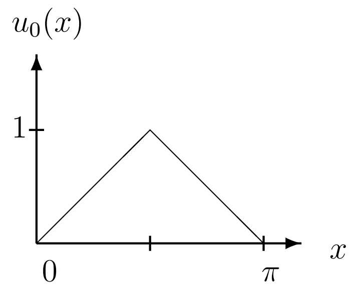

Bild: Anfangsauslenkung u_0

a) Man berechne die Lösung über den Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ und

b) zeichne die Lösung.

Lösung:

a) Der Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\lambda \, .$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T'' + \lambda T = 0 \quad \text{und} \quad X'' + \lambda X = 0 \, .$$

Der Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ eingesetzt in die Randbedingungen ergibt

$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \;\Rightarrow\; X(0) = 0$

$0 = u(\pi, t) = X(\pi)T(t) \;\Rightarrow\; X(\pi) = 0\,.$

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe für X besitzt somit die Eigenwerte

$$\lambda_k = k^2 \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

und die zugehörigen Eigenlösungen sind gegeben durch

$$X_k(x) = c_k \sin(kx)\,, \quad c_k \in \mathbb{R}\,.$$

Setzt man λ_k in die Differentialgleichung für T ein, so erhält man dort die Lösungen

$$T_k(t) = \tilde{a}_k \cos(kt) + \tilde{b}_k \sin(kt)\,.$$

Aus dem Produktansatz und Superposition ergibt sich damit die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\right) \sin(kx)\,.$$

Mit den noch nicht verwendeten Anfangsbedingungen werden die fehlenden Koeffizienten a_k und b_k bestimmt:

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \sin kx = 0 \quad \Rightarrow \quad b_k = 0\,,$$

$$u(x,0) = u_0(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$$

mit

$$\begin{aligned}
a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi}\left|x - \frac{\pi}{2}\right|\right) \sin kx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \sin kx\,dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \left(1 - \frac{2}{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right) \sin kx\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{4}{\pi^2} x \sin kx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{4}{\pi^2}(\pi - x) \sin kx\,dx \\
&= -\frac{4x\cos kx}{k\pi^2}\bigg|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{4}{k\pi^2} \cos kx\,dx - \frac{4(\pi - x)\cos kx}{k\pi^2}\bigg|_{\pi/2}^{\pi} \\
&\quad - \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{4}{k\pi^2} \cos kx\,dx \\
&= \frac{4}{k^2\pi^2} \sin kx\bigg|_0^{\pi/2} - \frac{4}{k^2\pi^2} \sin kx\bigg|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{8}{k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi}{2}.
\end{aligned}$$

b)

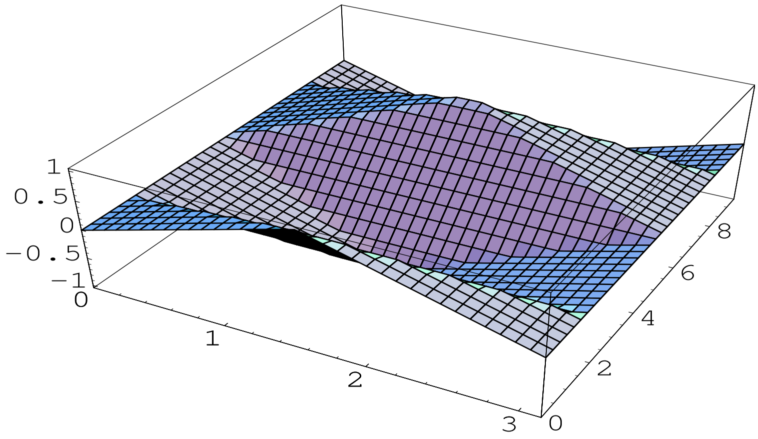

Bild 25 Lösung $u(x,t)$

Aufgabe 26:

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 25u_{xx}\,, \quad \text{für } 0 < x < 3 \text{ und } 0 < t, \\ u(0,t) &= 2\,, \quad u(3,t) \;=\; -1\,, \quad \text{für } t \geq 0, \\ u(x,0) &= 2 - x\,, \quad \text{für } 0 \leq x \leq 3\,, \\ u_t(x,0) &= v_0(x)\,. \end{aligned}$$

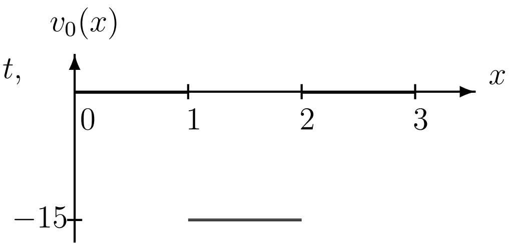

Bild: Anfangsgeschwindigkeit v_0

Lösung:

1. Schritt

Das Problem besitzt inhomogene Randbedingungen

$$u(0,t) = \varphi_0(t) := 2\,,\; u(3,t) = \varphi_1(t) := -1$$

und wird durch

$$v(x,t) := u(x,t) - \Big(\varphi_0(t) + \frac{x}{3}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))\Big) = u(x,t) - (2 - x)$$

in eines mit homogenen Randbedingungen transformiert. Das transformierte Problem in v lautet dann

$$\begin{aligned} v_{tt} &= 25v_{xx} \quad \text{für } 0 < x < 3,\; 0 < t\,, \quad (\text{mit } c^2 = 25) \\ v(x,0) &= u(x,0) - (2 - x) \;=\; 0 \\ v_t(x,0) &= u_t(x,0) - \Big(\varphi_0'(0) + \frac{x}{3}(\varphi_1'(0) - \varphi_0'(0))\Big) = v_0(x)\,, \\ v(0,t) &= 0 \;=\; v(3,t)\,, \quad \text{für } 0 \leq t\,. \end{aligned}$$

2. Schritt

Man löst das transformierte Problem in v. Die Lösungsdarstellung im Intervall $[0,\ell]$ aus dem Produktansatz, die schon die Randbedingungen erfüllt, lautet

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\frac{ck\pi t}{\ell}\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi t}{\ell}\right)\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\,.$$

Mit $c = 5$ und $\ell = 3$ ergibt das Einsetzen in die Anfangsbedingungen

$$0 = v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cdot 1 + B_k \cdot 0) \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad A_k = 0\,,$$

$$v_0(x) = v_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \frac{5k\pi}{3} \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,.$$

Berechnung der Fourierkoeffizienten $c_k := B_k \cdot \dfrac{5k\pi}{3}$

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{4}{6}\int\limits_0^3 v_0(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx \;=\; \frac{2}{3}\int\limits_1^2 -15\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx \;=\; \frac{30}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big|_1^2 \\
&= \frac{30}{k\pi}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} - \cos\frac{k\pi}{3}\right) \;\Rightarrow\; B_k = \frac{18}{k^2\pi^2}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} - \cos\frac{k\pi}{3}\right)
\end{aligned}
$$

Damit wird das Gesamtproblem gelöst durch:

$$
u(x,t) = 2 - x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{18}{k^2\pi^2}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} - \cos\frac{k\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{5k\pi t}{3}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right) .
$$

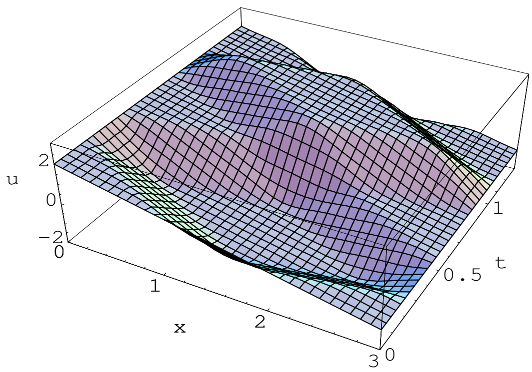

Bild 26 Lösung $u(x,t)$, $0 \le x \le 3$, $0 \le t \le 1.2$

Aufgabe 27:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fourier-Methode

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (4t+1)\sin(2x) + \frac{x}{\pi}\, e^{-t} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ u(x,0) &= \pi - x \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \pi\,, \\ u(0,t) &= \pi\,, \;\; u(\pi,t) = 1 - e^{-t} \quad \text{für} \quad 0 \le t\,. \end{aligned}$$

Lösung:

Die Lösung des Problems erfolgt in zwei Schritten:

1. Schritt

Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen

$u(0,t) = \varphi_0(t) := \pi$ und $u(\pi,t) = \varphi_1(t) := 1 - e^{-t}$ wird durch

$$v(x,t) := u(x,t) - \Big(\varphi_0(t) + \frac{x}{\pi}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))\Big) = u(x,t) - \Big(\pi + \frac{x}{\pi}(1 - e^{-t} - \pi)\Big)$$

in eines mit homogenen Randbedingungen in v transformiert.

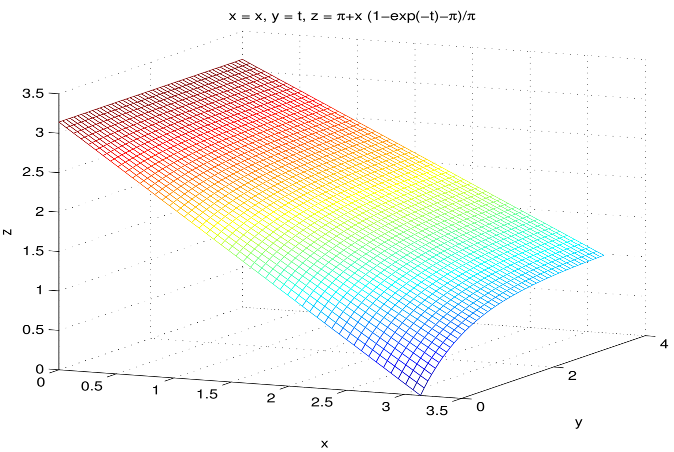

Bild 27.1 $\quad g(x,t) = \pi + \dfrac{x}{\pi}(1 - e^{-t} - \pi)$

$$u_t = v_t + \frac{x}{\pi}\, e^{-t}\,, \quad u_{xx} = v_{xx}\,, \quad \pi - x = u(x,0) = \underbrace{v(x,0)}_{=0} + \pi - x$$

Zusätzlich zu den homogenen Randbedingungen stellen sich hier also auch homogene Anfangsbedingungen ein.

<u>2. Schritt</u>
Das transformierte Problem in v lautet dann insgesamt

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + (4t+1)\sin(2x) \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ v(x,0) &= 0 \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \pi\,, \\ v(0,t) &= 0 = v(\pi,t) \quad \text{für} \quad 0 \le t\,. \end{aligned}$$

Für die Lösung wird nach der Fourier-Methode folgender Ansatz gemacht:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\sin(kx)\,.$$

Die homogene Anfangsbedingung wird nach einem Koeffizientenvergleich durch die Forderung $a_k(0) = 0$ erfüllt. Die Inhomogenität wird ebenfalls in eine sin-Reihe entwickelt

$$(4t+1)\sin(2x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)\sin(kx) \quad \Rightarrow \quad c_2(t) = 4t+1\,,\; c_{k\neq 2}(t) = 0\,.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\dot{a}_k(t) + k^2 a_k(t) - c_k(t)\big)\sin(kx) = 0.$$

Die Koeffizienten $a_k(t)$ der Lösung v sind daher aus den folgenden gewöhnlichen Anfangswertaufgaben zu berechnen

$$\dot{a}_k(t) + k^2 a_k(t) = c_k(t) \quad \text{mit} \quad a_k(0) = 0.$$

Für $k \neq 2$ erhält man

$$\dot{a}_k(t) + k^2 a_k(t) = 0 \;\Rightarrow\; a_k(t) = d_k e^{-k^2 t}\,,\; \text{mit}\; a_k(0) = 0 \;\Rightarrow\; d_k = 0 \;\Rightarrow\; a_k(t) = 0.$$

Für $k = 2$ und dem speziellen Ansatz $y(t) = at + b$ für eine inhomogene Lösung erhält man

$$\dot{a}_2(t) + 4a_2(t) = 4t+1 \;\Rightarrow\; a_2(t) = t + d_2 e^{-4t}\,,\; \text{mit}\; a_2(0) = 0 \;\Rightarrow\; d_2 = 0 \;\Rightarrow\; a_2(t) = t.$$

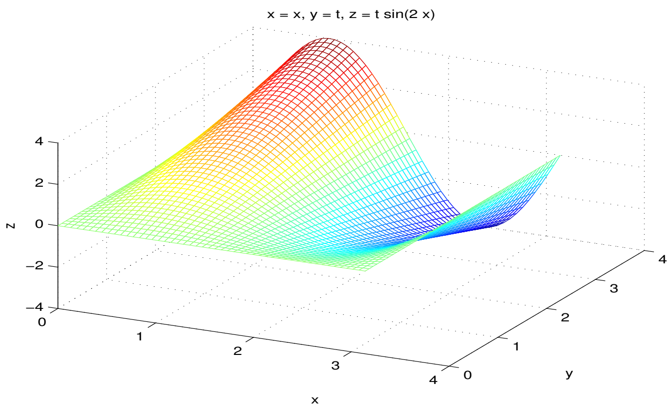

Bild 27.2 $\quad v(x,t) = t\sin(2x)$

Die Lösung des Ausgangsproblems erhält man nun durch

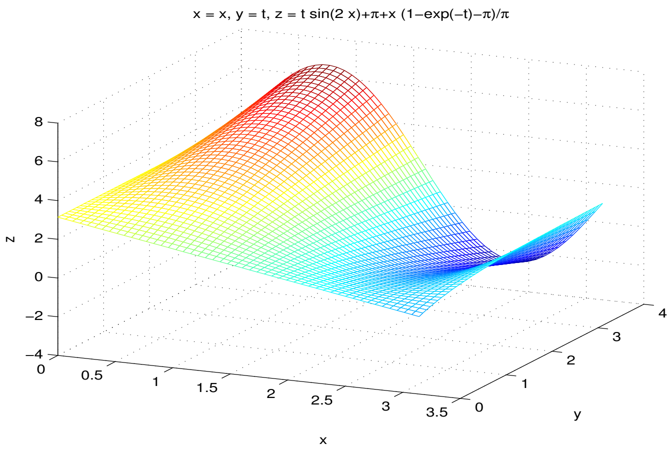

Bild 27.3 $\quad u(x,t) = t\sin(2x) + \pi + \dfrac{x}{\pi}(1 - e^{-t} - \pi)$

Aufgabe 28:

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung unter Verwendung der Fourier-Methode:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + \sin(x) + t^2\sin(3x)\,, \qquad \text{für} \quad 0 < x < \pi \quad \text{und} \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0 \;=\; u(\pi,t)\,, \quad \text{für} \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= 2\sin(2x)\,, \\ u_t(x,0) &= 4\sin(4x)\,, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi\,. \end{aligned}$$

Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

Lösung:

Die Lösung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen: $u(x,t) = v^*(x,t) + v^{**}(x,t)$

1. Schritt

Man löst das Problem mit homogener Differentialgleichung und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} v_{tt} &= v_{xx}\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi \quad \text{und} \quad t > 0, \\ v(0,t) &= 0 \;=\; v(\pi,t)\,, \quad \text{für} \quad t \geq 0\,, \\ v(x,0) &= 2\sin(2x)\,, \\ v_t(x,0) &= 4\sin(4x)\,, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi\,. \end{aligned}$$

Die Lösungsdarstellung aus dem Produktansatz mit Superposition lautet:

$$v^*(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k\cos(kt) + B_k\sin(kt))\sin(kx)$$

$$2\sin(2x) = v^*(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k\sin(kx) \quad \Rightarrow \quad A_2 = 2\,, \quad A_k = 0 \;\; \text{sonst}$$

$$4\sin(4x) = v_t^*(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} kB_k\sin(kx) \quad \Rightarrow \quad B_4 = 1\,, \quad B_k = 0 \;\; \text{sonst}$$

$$\Rightarrow \quad v^*(x,t) = 2\cos(2t)\sin(2x) + \sin(4t)\sin(4x)$$

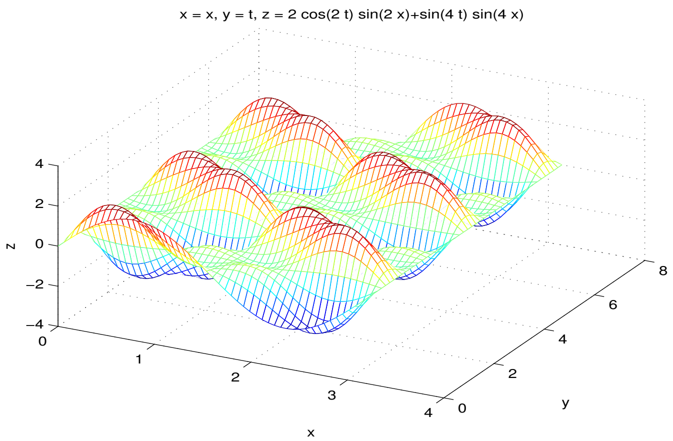

Bild 28.1 $\quad v^*(x,t) = 2\cos(2t)\sin(2x) + \sin(4t)\sin(4x)$

2. Schritt

Man löst das Problem mit inhomogener Differentialgleichung und homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} v_{tt} &= v_{xx} + \sin(x) + t^2\sin(3x)\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi \quad \text{und} \quad t > 0, \\ v(0,t) &= 0 = v(\pi,t)\,, \quad \text{für} \quad t \geq 0\,, \\ v(x,0) &= 0 = v_t(x,0)\,, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \pi\,. \end{aligned}$$

Lösungsansatz nach der Fourierschen Methode: $\quad v^{**}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\sin(kx)\,.$

Die homogenen Anfangsbedingungen führen auf $v_k(0) = 0$ und $\dot{v}_k(0) = 0$.

Die Inhomogenität der Differentialgleichung wird ebenfalls in eine sin-Reihe entwickelt

$$\sin(x) + t^2\sin(3x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin(kx) \quad \Rightarrow \quad f_1(t) = 1\,, f_3(t) = t^2\,,\ f_k(t) = 0 \text{ sonst}\,.$$

In DGL einsetzen ergibt: $\quad \sum_{k=1}^{\infty} \big(\ddot{v}_k(t) + k^2 v_k(t) - f_k(t)\big)\sin(kx) = 0.$

Die Koeffizienten $v_k(t)$ von v^{**} ergeben sich aus

$$\ddot{v}_k(t) + k^2 v_k(t) - f_k(t) = 0 \quad \text{mit} \quad v_k(0) = 0 = \dot{v}_k(0)\,.$$

Für $k \neq 1,3$ erhält man $v_k \equiv 0$.

Für $k = 1$ erhält man aus $\quad \ddot{v}_1(t) + v_1(t) - 1 = 0$ die allgemeine Lösung

$$v_1(t) = A_1\cos(t) + B_1\sin(t) + 1\,.$$

Mit den Anfangsvorgaben $v_1(0) = 0 = \dot{v}_1(0)$ erhält man

$$v_1(t) = 1 - \cos(t)\,.$$

Für $k = 3$ erhält man aus $\ddot{v}_3(t) + 9v_3(t) - t^2 = 0$ die allgemeine Lösung

$$v_3(t) = A_3 \cos(3t) + B_3 \sin(3t) + \frac{t^2}{9} - \frac{2}{81}\,.$$

Mit den Anfangsvorgaben $v_3(0) = 0 = \dot{v}_3(0)$ erhält man

$$v_3(t) = \frac{2}{81}\cos(3t) + \frac{t^2}{9} - \frac{2}{81}\,.$$

$$\Rightarrow \quad v^{**}(x,t) = (1-\cos(t))\sin(x) + \left(\frac{2}{81}\cos(3t) + \frac{t^2}{9} - \frac{2}{81}\right)\sin(3x)$$

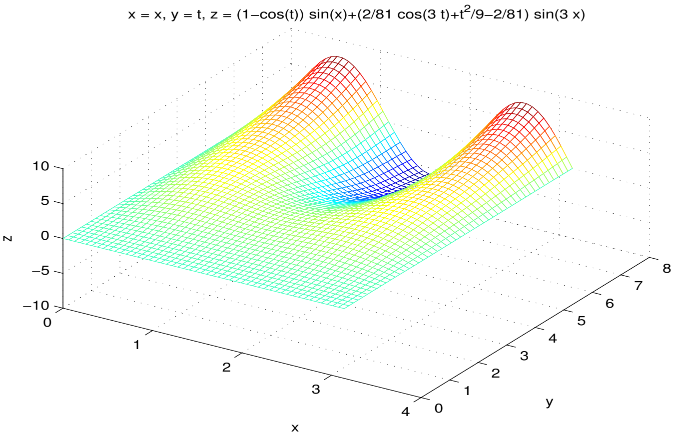

Bild 28.2 $\quad v^{**}(x,t) = (1-\cos(t))\sin(x) + \left(\frac{2}{81}\cos(3t) + \frac{t^2}{9} - \frac{2}{81}\right)\sin(3x)$

Die Lösung des Ausgangsproblems erhält man nun durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= v^*(x,t) + v^{**}(x,t) \\ &= 2\cos(2t)\sin(2x) + \sin(4t)\sin(4x) \\ &\quad +(1-\cos(t))\sin(x) + \left(\frac{2}{81}\cos(3t) + \frac{t^2}{9} - \frac{2}{81}\right)\sin(3x) \end{aligned}$$

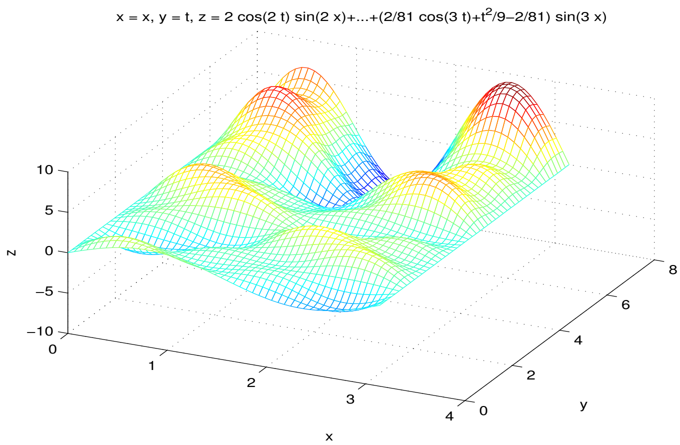

Bild 28.3 $\quad u(x,t) = v^*(x,t) + v^{**}(x,t)$