Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 6

Aufgabe 21:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{array}{rlll} u_t & = \Delta u & \text{für} & (x,y) \in \,]0,1[\, \times \,]0,3[,\ 0 < t\,, \\ u(0,y,t) & = 0 = u(1,y,t) & \text{für} & y \in [0,3]\,, \quad 0 \le t\,, \\ u(x,0,t) & = 0 = u(x,3,t) & & x \in [0,1]\,, \quad 0 \le t\,, \\ u(x,y,0) & = (3\sin\pi x - \sin 3\pi x)\sin\pi y & \text{für} & (x,y) \in [0,1] \times [0,3]\,. \end{array}$$

Man zeichne die Lösung u für $t = 0, \frac{1}{80}, \frac{1}{20}, \frac{1}{5}$. Wie verhält sich die Lösung für $t \to \infty$?

Lösung:

Der Produktansatz $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} =: -\lambda = (\text{konst})\,.$$

Für T erhält man eine gewöhnliche Differentialgleichung:

$$T' + \lambda T = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = Ke^{-\lambda t}\,.$$

Nach weiterer Trennung ergeben sich gewöhnliche Differentialgleichungen in X und Y

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda = -\mu = (\text{konst})\,.$$

Die Randbedingungen

$$\begin{array}{rclcl} 0 & = & u(0,y,t) & = & X(0)Y(y)T(t)\,, \\ 0 & = & u(1,y,t) & = & X(1)Y(y)T(t)\,, \\ 0 & = & u(x,0,t) & = & X(x)Y(0)T(t)\,, \\ 0 & = & u(x,3,t) & = & X(x)Y(3)T(t) \end{array}$$

liefern $X(0) = 0 = X(1)$ und $Y(0) = 0 = Y(3)$.

Die gewöhnliche Randwertaufgabe in X

$$X''(x) + \mu X(x) = 0 \quad \text{mit} \quad X(0) = 0 = X(1)$$

besitzt nur nichttriviale Lösungen für $\mu > 0$

$$X(x) = a\cos(\sqrt{\mu}x) + b\sin(\sqrt{\mu}x)\ .$$

Einsetzen des Randwertes $X(0) = 0$ ergibt $a = 0$ und $X(1) = 0$ liefert $\mu_k = k^2\pi^2$ mit $k \geq 1$ und $X_k(x) = b_k \sin(k\pi x)$.

Die gewöhnliche Randwertaufgabe in Y

$$Y''(y) + (\lambda - \mu)Y(y) = 0 \quad \text{mit} \quad Y(0) = 0 = Y(3)$$

besitzt nur nichttriviale Lösungen für $\lambda - \mu > 0$

$$Y(y) = c\cos(\sqrt{\lambda - \mu}y) + d\sin(\sqrt{\lambda - \mu}y)\ .$$

Einsetzen des Randwertes $Y(0) = 0$ ergibt $c = 0$ und $Y(3) = 0$ liefert

$\lambda_{k,j} - \mu_k = \dfrac{j^2\pi^2}{9}$ mit $j \geq 1$ und $Y_j(y) = d_j \sin\left(\dfrac{j\pi y}{3}\right)$.

Setzt man $\lambda_{k,j}$ in die Differentialgleichung für T ein, so erhält man dort die Lösungen

$$T_{k,j}(t) = Ke^{-\pi^2(k^2+j^2/9)t}\ .$$

Aus dem Produktansatz und Superposition ergibt sich damit die Lösung

$$u(x,y,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} A_{k,j}e^{-\pi^2(k^2+j^2/9)t}\sin(k\pi x)\sin\left(\frac{j\pi y}{3}\right)\ .$$

Die Anfangsvorgabe führt auf

$$3\sin\pi x\sin\pi y - \sin 3\pi x\sin\pi y = u(x,y,0) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} A_{k,j}\sin(k\pi x)\sin\left(\frac{j\pi y}{3}\right)\ .$$

Die Fourierkoeffizienten kann man hier über einen Koeffizientenvergleich erhalten

$$A_{1,3} = 3,\ A_{3,3} = -1 \quad \text{und sonst} \quad A_{k,j} = 0.$$

Die Lösung lautet also

$$u(x,y,t) = 3e^{-10\pi^2 t/9}\sin(\pi x)\sin(\pi y) - e^{-2\pi^2 t}\sin(3\pi x)\sin(\pi y)\ .$$

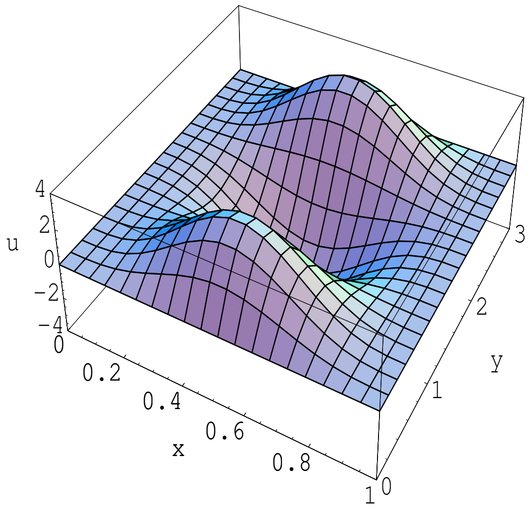

Bild 21 a) $u(x, y, 0)$

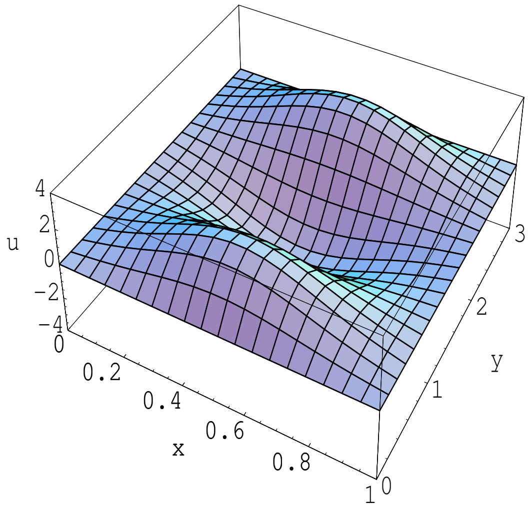

Bild 21 b) $u(x, y, 1/80)$

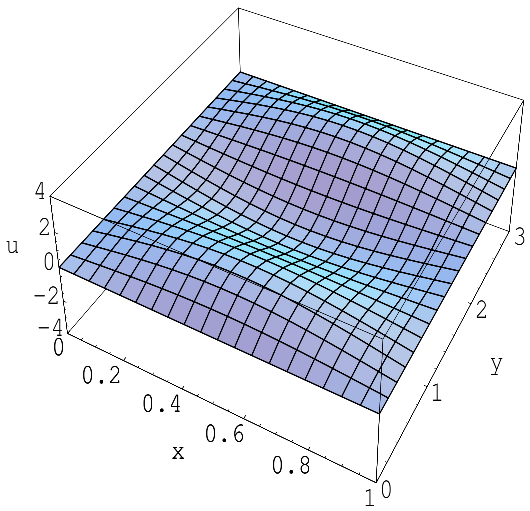

Bild 21 c) $u(x, y, 1/20)$

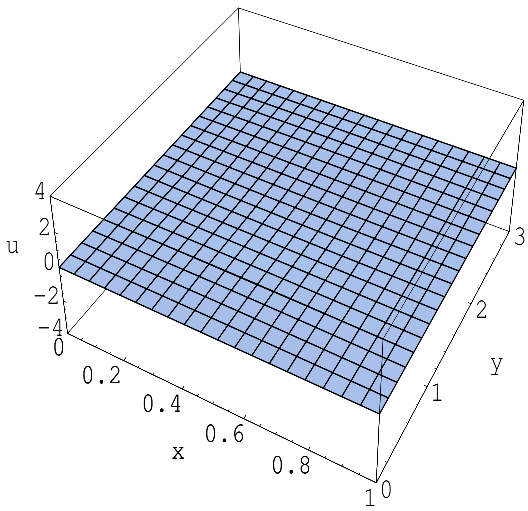

Bild 21 d) $u(x, y, 1/5)$

Wegen $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-2\pi^2 t} = 0 = \lim\limits_{t\to\infty} e^{-10\pi^2 t}$ gilt $\lim\limits_{t\to\infty} u(x, y, t) = 0$.

Aufgabe 22:

Die Telegraphengleichung $u_{xx} = u_{tt} + 4u_t + 4u$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x,t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0,t) = \cos(t)$ für $t \geq 0$ eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \to \infty$ beschränkt sein.

a) Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.

b) Man versuche den Lösungsansatz $u(x,t) = u_0 e^{-ax} \cos(t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Lösung:

a) Setzt man den Produktansatz in die Randbedingung ein, so erhält man

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) \stackrel{!}{=} \cos t \quad \Rightarrow \quad X(0) \neq 0 \quad \text{und} \quad T(t) = \frac{\cos t}{X(0)}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = \frac{X(x)\cos t}{X(0)} .$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung $0 = u_{tt} + 4u_t + 4u - u_{xx}$ ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{X(0)} \left(-X\cos t - 4X\sin t + 4X\cos t - X''\cos t \right) \\ &= \frac{1}{X(0)} \left((3X - X'')\cos t - 4X\sin t \right) . \end{aligned}$$

Da $\sin t$ und $\cos t$ linear unabhängig sind, muss

$$3X - X'' = 0 \quad \text{und} \quad -4X = 0$$

gelten. Einzige Lösung ist $X \equiv 0$. Damit führt der Produktansatz auf $u \equiv 0$, also zu keiner Lösung.

b) Der Lösungsansatz $u(x,t) = e^{-ax}\cos(t-bx)$ erfüllt die Randbedingungen und $a > 0$ sorgt für die Beschränktheit von u für $x \to \infty$.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= u_{tt} + 4u_t + 4u - u_{xx} \\ &= e^{-ax}\left\{\cos(t-bx)\underbrace{\left(3+b^2-a^2\right)}_{=0} + \sin(t-bx)\underbrace{(2ab-4)}_{=0}\right\}. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt das nichtlineare Gleichungssystem

$$ab = 2 \quad \wedge \quad a^2 - b^2 = 3.$$

$\Rightarrow\ b = \dfrac{2}{a}\ \Rightarrow\ 3 = a^2 - b^2 = a^2 - \dfrac{4}{a^2}$
$\Rightarrow\ 0 = a^4 - 3a^2 - 4 = (a^2+1)(a^2-4)\ \Rightarrow\ a = \pm 2\ \Rightarrow\ b = \pm 1$

Wegen der Beschränktheit der Signalspannung u gibt es nur die Lösung $a = 2 > 0$ und $b = 1$.

Damit lautet die Lösung der Telegraphengleichung

$$u(x,t) = e^{-2x}\cos(t-x).$$

Aufgabe 23:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 25u_{xx}\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= \sin x\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= 1\,. \end{aligned}$$

a) Für den Punkt $(x_0, t_0) = (6, 2)$ gebe man den Abhängigkeitsbereich der Lösung an.

b) Für $x \in [-10, 20]$ zeichne man den Bestimmtheitsbereich der Lösung für $t \geq 0$.

c) Man löse das Anfangswertaufgabe.

Lösung:

Ein Vergleich von $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ mit $u_{tt} = 25u_{xx}$ ergibt $c = 5$.

a) Abhängigkeitsbereich $(x_0, t_0) = (6, 2)$: $A = [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] = [-4, 16]$

b)

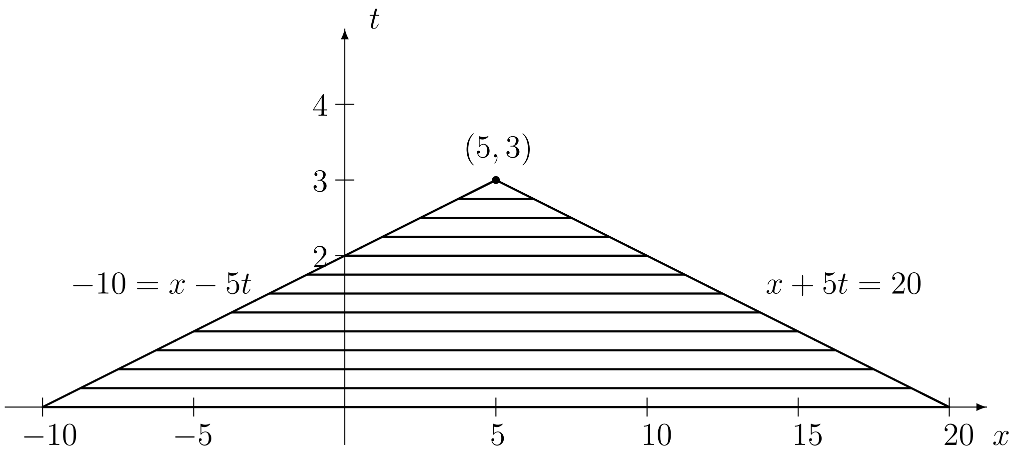

Bild 23 b) Bestimmtheitsbereich für $t \geq 0$

c) Mit der d' Alembertschen Lösungsformel erhält man

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\sin(x+5t) + \sin(x-5t)) + \frac{1}{2\cdot 5}\int\limits_{x-5t}^{x+5t} 1\,dy = \frac{1}{2}(\sin(x+5t) + \sin(x-5t)) + t.$$

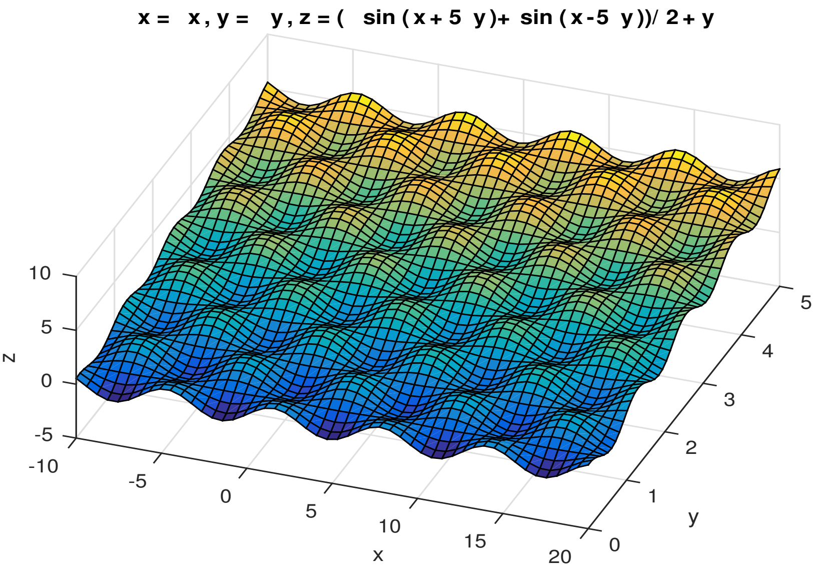

Bild 23 c) Lösung $u(x, y)$

Aufgabe 24:

Gegeben sei das Anfangsrandwertproblem im Halbraum

$$\begin{aligned} u_{tt} - 9u_{xx} &= 0\,, && x \in \mathbb{R}_+\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= 2x^4\,, && x \geq 0\,, \\ u_t(x,0) &= 12x\,, && \\ u(0,t) &= 0\,, && t > 0 \end{aligned}$$

a) Man gebe den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt $(x_0, t_0) = (7, 1)$ an.

b) Man zeichne den Bestimmtheitsbereich der Lösung zum Intervall $[0, 12]$ für $t \geq 0$.

c) Man löse das Anfangsrandwertproblem mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine C^2-Funktion handelt.

Lösung:

Ein Vergleich von $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ mit $u_{tt} - 9u_{xx} = 0$ ergibt $c = 3$.

a) Abhängigkeitsbereich $(x_0, t_0) = (7, 1)$: $A = [x_0 - ct_0, x_0 + ct_0] = [4, 10]$

b)

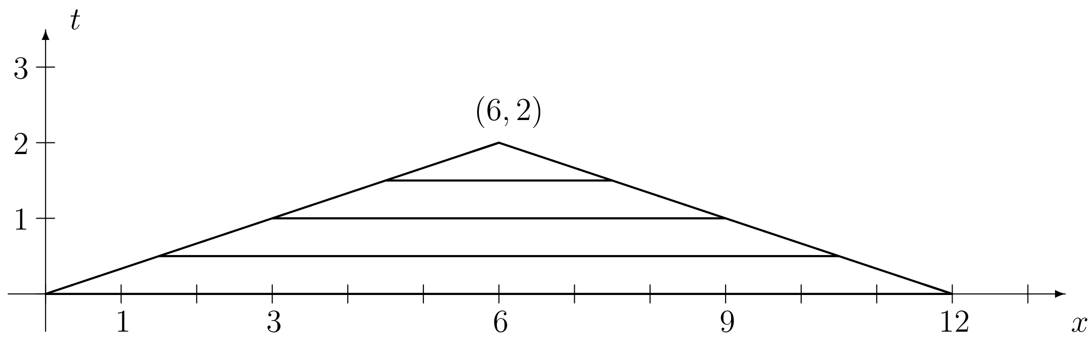

Bild 24 Bestimmtheitsbereich für $t \geq 0$

c)

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(2(x+3t)^4 + 2(x-3t)^4\right) + \frac{1}{6}\int\limits_{x-3t}^{x+3t} 12y\,dy &, \quad 3t \le x \\[2ex] \frac{1}{2}\left(2(x+3t)^4 - 2(3t-x)^4\right) + \frac{1}{6}\int\limits_{3t-x}^{x+3t} 12y\,dy &, \quad x < 3t \end{cases} \\
&= \begin{cases} (x+3t)^4 + (x-3t)^4 + y^2\big|_{x-3t}^{x+3t} &, \quad 3t \le x \\[1ex] (x+3t)^4 - (3t-x)^4 + y^2\big|_{3t-x}^{x+3t} &, \quad x < 3t \end{cases} \\
&= \begin{cases} (x+3t)^4 + (x-3t)^4 + (x+3t)^2 - (x-3t)^2 &, \quad 3t \le x \\[1ex] (x+3t)^4 - (x-3t)^4 + (x+3t)^2 - (x-3t)^2 &, \quad x < 3t \end{cases}
\end{aligned}
$$

Da $u_t(x,0) = 12x$ ungerade ist und die ungerade Fortsetzung von $u(x,0) = 2x^4$ eine C^3-Funktion ist, handelt es sich bei der Lösung u sogar um eine C^3-Funktion.

Dies spiegelt sich in dem einzigen Unterschied von $w_1(x,t) = (x-3t)^4$ und $w_2(x,t) = -(x-3t)^4$ in der zweigeteilten Lösung wieder, die für $x = 3t$ noch C^3-Funktion ist.