

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6 14.7.-17.7.

Aufgabe 21:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung mit Hilfe eines Produktansatzes:

$$\begin{aligned}u_t &= \Delta u && \text{für } (x, y) \in]0, 1[\times]0, 3[, 0 < t, \\u(0, y, t) &= 0 = u(1, y, t) && \text{für } y \in [0, 3], 0 \leq t, \\u(x, 0, t) &= 0 = u(x, 3, t) && x \in [0, 1], 0 \leq t, \\u(x, y, 0) &= (3 \sin \pi x - \sin 3\pi x) \sin \pi y && \text{für } (x, y) \in [0, 1] \times [0, 3].\end{aligned}$$

Man zeichne die Lösung u für $t = 0, \frac{1}{80}, \frac{1}{20}, \frac{1}{5}$. Wie verhält sich die Lösung für $t \rightarrow \infty$?

Aufgabe 22:

Die Telegraphengleichung $u_{xx} = u_{tt} + 4u_t + 4u$ beschreibt den zeitlichen Verlauf einer Signalspannung u am Ort $x > 0$ in einem langen Übertragungskabel.

Gesucht ist die Signalspannung $u(x, t)$, wenn am Rand $x = 0$ des Übertragungskabels ein periodisches Signal der Form $u(0, t) = \cos(t)$ für $t \geq 0$ eingespeist wird. Außerdem soll die Signalspannung u für $x \rightarrow \infty$ beschränkt sein.

- Man zeige, dass ein Produktansatz der Form $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$ zu keiner Lösung führt.
- Man versuche den Lösungsansatz $u(x, t) = u_0 e^{-ax} \cos(t - bx)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $a > 0$.

Aufgabe 23:

Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned}u_{tt} &= 25u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= \sin x, & x \in \mathbb{R}, \\u_t(x, 0) &= 1.\end{aligned}$$

- Für den Punkt $(x_0, t_0) = (6, 2)$ gebe man den Abhängigkeitsbereich der Lösung an.
- Für $x \in [-10, 20]$ zeichne man den Bestimmtheitsbereich der Lösung für $t \geq 0$.
- Man löse das Anfangswertaufgabe.

Aufgabe 24:

Gegeben sei das Anfangsrandwertproblem im Halbraum

$$\begin{aligned}u_{tt} - 9u_{xx} &= 0, & x \in \mathbb{R}_+, \quad t > 0, \\u(x, 0) &= 2x^4, & x \geq 0, \\u_t(x, 0) &= 12x, \\u(0, t) &= 0, & t > 0\end{aligned}$$

- Man gebe den Abhängigkeitsbereich der Lösung im Punkt $(x_0, t_0) = (7, 1)$ an.
- Man zeichne den Bestimmtheitsbereich der Lösung zum Intervall $[0, 12]$ für $t \geq 0$.
- Man löse das Anfangsrandwertproblem mit Hilfe der Reflexionsmethode und kläre, ob es sich bei der gefundenen Lösung um eine C^2 -Funktion handelt.

Tutoren gesucht:

Für die Durchführung und/oder Korrektur von Übungen zu

Analysis I bzw. Mathematik III im Wintersemester 2020/21

und für den Brückenkurs Mathematik 2020/21

suchen wir noch studentische Tutoren.

Bewerbungen bitte per email an Kai Rothe (rothe@math.uni-hamburg.de) richten mit Namen, Matrikelnummer, Studiengang und bisherigen Klausurergebnissen in Mathematik.