Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 5

Aufgabe 17:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Halbkreisring

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \quad \text{für} \quad 1 < r < 3 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \pi\,,$$

$$u(r,0) = 0 \quad \text{und} \quad u(r,\pi) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \le r \le 3\,,$$

$$u(1,\varphi) = 2\sin(\varphi) \quad \text{und} \quad u(3,\varphi) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \le \varphi \le \pi,$$

bestimme deren maximalen und minimalen Funktionswert und zeichne sie.

Lösung:

Der Produktansatz $u(r,\varphi) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 R''\Phi + rR'\Phi + R\Phi'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \lambda$$

Der Produktansatz $u(r,\varphi) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)$ eingesetzt in die Randbedingungen

$$0 = u(r,0) = R(r)\Phi(0)\,, \quad 0 = u(r,\pi) = R(r)\Phi(\pi)$$

ergibt nur nichttriviale Lösungen u (R darf nicht die Nullfunktion sein) für

$$\Phi(0) = 0 = \Phi(\pi)\ .$$

Damit erhält man für Φ nur für $\lambda > 0$ nichttriviale Lösungen (in reeller Darstellung):

$$\Phi(\varphi) = a\sin(\sqrt{\lambda}\varphi) + b\cos(\sqrt{\lambda}\varphi)\,.$$

Insbesondere ergibt sich aus den Randbedingungen

$$0 = \Phi(0) = a\sin(\sqrt{\lambda}\cdot 0) + b\cos(\sqrt{\lambda}\cdot 0) = b \quad , \quad 0 = \Phi(\pi) = a\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot\pi\right).$$

Wegen $a \neq 0$, sonst wäre Φ die Nullfunktion, muss gelten

$$\sqrt{\lambda}\cdot\pi = k\pi \ \Rightarrow\ \sqrt{\lambda} = k \ \Rightarrow\ \lambda_k = k^2 \quad \Rightarrow \quad \Phi_k(\varphi) = a_k\sin(k\varphi)\,, \quad k = 1,2,\ldots$$

Setzt man $\lambda_k = k^2$ in die Differentialgleichung für $R(r)$ ein, so erhält man dort mit dem Ansatz r^α die Lösungen

$$R_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k}\,.$$

Durch Superposition ergibt sich aus dem Produktansatz damit die Lösungsdarstellung

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + B_k r^{-k}) \sin(k\varphi)\,.$$

Mit den noch nicht verwendeten Randbedingungen

$$2\sin(\varphi) = u(1,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k + B_k) \sin(k\varphi)$$

und

$$0 = u(3,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k 3^k + B_k 3^{-k}) \sin(k\varphi)$$

ergeben sich die Fourier-Koeffizienten über einen Koeffizientenvergleich:

$$A_1 + B_1 = 2 \quad \text{und} \quad 3A_1 + \frac{B_1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow\ B_1 = -9A_1 \ \Rightarrow\ -8A_1 = 2 \ \Rightarrow\ A_1 = -\frac{1}{4} \ \Rightarrow\ B_1 = \frac{9}{4}$$

Außerdem gilt $A_{k\neq 1} + B_{k\neq 1} = 0$ und $A_{k\neq 1} 3^k + B_{k\neq 1}/3^k = 0 \Rightarrow A_{k\neq 1} = 0 = B_{k\neq 1}$.

Die Lösung des Ausgangsproblems lautet daher

$$u(r,\varphi) = \left(\frac{9}{4r} - \frac{r}{4}\right) \sin(\varphi)\,.$$

Da u harmonisch und nicht konstant ist, werden Maximum und Minimum nur auf dem Rand angenommen:

$$u_{\max} = u\left(1, \frac{\pi}{2}\right) = 2\,, \quad u_{\min} = u\,(1,0) = 0.$$

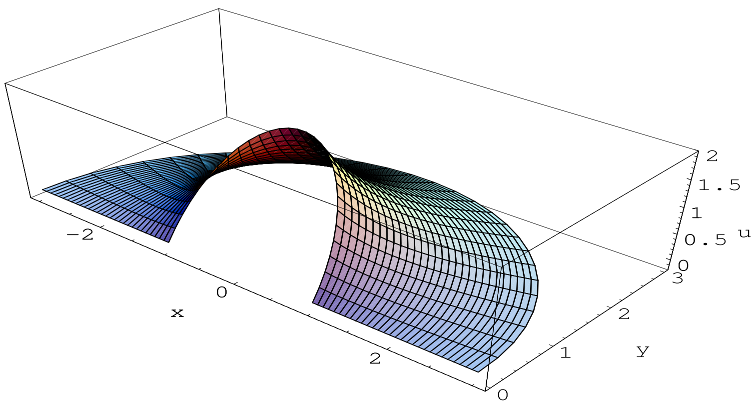

Bild 17: Lösung $u(r,\varphi)$

Aufgabe 18:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für die folgende Wärmeleitungsgleichung:

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für } 0 < x < 3\,, \\ & && \phantom{\text{für }} 0 < t \le T\,, \\ u(0,t) &= 0 = u(3,t) && \text{für } 0 \le t \le T \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für } 0 \le x \le 3 \end{aligned}$$

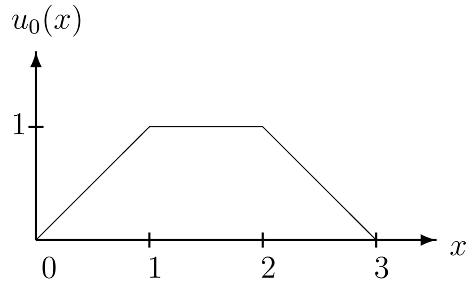

Bild 18 Anfangsfunktion u_0

und bestimme den Maximalwert der Lösung u im Gebiet $[0,3] \times [0,T]$.

Lösung:

Der Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$, eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\lambda = (\text{konst})\,.$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T' + \lambda T = 0 \quad \text{und} \quad X'' + \lambda X = 0.$$

Die Randbedingungen

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \quad \text{und} \quad 0 = u(3,t) = X(3)T(t)$$

liefern $X(0) = 0 = X(3)$.

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe in X besitzt nur für $\lambda > 0$ nichttriviale Lösungen:

$$X(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x)\,.$$

Einsetzen des Randwertes $X(0) = 0$ ergibt $a = 0$ und $X(3) = 0$ liefert die Eigenwerte

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{9}$$

mit $k \ge 1$ und zugehörigen Eigenfunktionen

$$X_k(x) = b_k \sin\frac{k\pi x}{3}\,.$$

Setzt man λ_k in die Differentialgleichung für T ein, so erhält man dort die Lösungen

$$T_k(t) = \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{9}t\right)\,.$$

Aus dem Produktansatz und Superposition ergibt sich damit die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{3} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{9}t\right) .$$

Mit der noch nicht verwendeten Anfangsbedingung werden die fehlenden Koeffizienten b_k berechnet.

Aus dem Bild in der Aufgabenstellung ergibt sich die Anfangsvorgabe

$$u_0(x) \;=\; \begin{cases} x & \text{für } \; 0 \le x \le 1\,, \\ 1 & \text{für } \; 1 \le x \le 2\,, \\ 3-x & \text{für } \; 2 \le x \le 3\,. \end{cases}$$

Die Anfangsbedingung führt damit auf

$$u_0(x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right) .$$

Die b_k ergeben sich also als Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{3}\int\limits_0^3 u_0(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx \\
&= \frac{2}{3}\left\{\int\limits_0^1 x\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx + \int\limits_1^2 \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx + \int\limits_2^3 (3-x)\sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx\right\} \\
&= \frac{2}{3}\left\{-\frac{3x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\bigg|_0^1 + \frac{3}{k\pi}\int\limits_0^1 \cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx - \frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\bigg|_1^2\right. \\
&\qquad \left. - \frac{3(3-x)}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\bigg|_2^3 - \frac{3}{k\pi}\int\limits_2^3 \cos\left(\frac{k\pi x}{3}\right)\,dx\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{2}{3}\left\{-\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{3} + \left(\frac{3}{k\pi}\right)^2\sin\frac{k\pi}{3} - \frac{3}{k\pi}\cos\frac{2k\pi}{3} + \frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{3}\right. \\
&\qquad \left. \frac{3}{k\pi}\cos\frac{2k\pi}{3} - \left(\frac{3}{k\pi}\right)^2\sin\frac{3k\pi}{3} + \left(\frac{3}{k\pi}\right)^2\sin\frac{2k\pi}{3}\right\} \\
&= \frac{6}{k^2\pi^2}\left\{\sin\frac{k\pi}{3} + \sin\frac{2k\pi}{3}\right\}
\end{aligned}$$

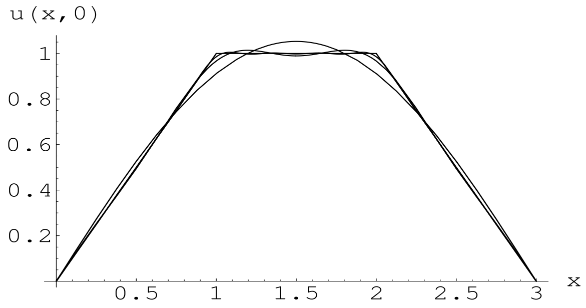

Bild 18 a) u_0 und Lösungsnäherungen $u_N(x,0) = \sum_{k=1}^{N} b_k \sin \frac{k\pi x}{3}$, $N = 1, 10, 20$

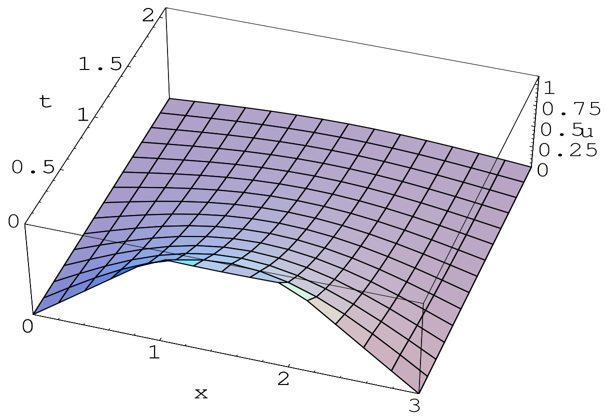

Bild 18 b) Näherungslösung $u_{20}(x,t) = \sum_{k=1}^{20} b_k \sin \frac{k\pi x}{3} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{9}t\right)$

Nach dem Maximumprinzip gilt $\max\limits_{(x,t)\in[0,4]\times[0,T]} u(x,t) = \max\limits_{x\in[0,3]} u_0(x) = 1.$

Aufgabe 19:

Gegeben sei die folgende Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= 3u_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 1\,, \quad u(\pi,t) = -1 \quad \text{für} \quad 0 \le t\,, \\ u(x,0) &= \cos x \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \pi\,. \end{aligned}$$

a) Man transformiere das gegebene Problem in u zuerst in ein Problem in v mit homogenen Randbedingungen.

b) Man löse das transformierte Problem in v.

Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

c) Man gebe die Lösung u an.

d) Man bestimme den maximalen Funktionswert von u im zu Grunde liegenden Gebiet $G := [0,\pi] \times [0,\infty[$.

Lösung:

a) Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen $u(0,t) = \varphi_0(t) := 1$ und $u(\pi,t) = \varphi_1(t) := -1$ wird durch

$$v(x,t) := u(x,t) - \Big(\varphi_0(t) + \frac{x}{\pi}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))\Big) = u(x,t) - 1 + \frac{2x}{\pi}$$

in eines mit homogenen Randbedingungen transformiert.

Da sich die Differentialgleichung unter der Transformation, wegen $u_t = v_t$ und $u_{xx} = v_{xx}$, nicht ändert, lautet das transformierte Problem in v:

$$\begin{aligned} v_t &= 3v_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi\,, \quad 0 < t\,, \\ v(x,0) &= v_0(x) = \cos x - 1 + \frac{2x}{\pi} \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \pi\,, \\ v(0,t) &= 0 = v(\pi,t) \quad \text{für} \quad 0 \le t\,. \end{aligned}$$

b) Die Lösungsdarstellung lautet

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-3k^2 t} \sin(kx)$$

Denn aus dem Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ ergibt sich:

$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0,\ X(\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = k^2,\ X_k(x) = b_k \sin kx$

$T' + 3\lambda_k T = 0 \quad \Rightarrow \quad T_k(t) = \exp\left(-3k^2 t\right)$.

Mit der Anfangsbedingung

$$\cos x - 1 + \frac{2x}{\pi} = v_0(x) = v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

werden die fehlenden Koeffizienten b_k berechnet.

$$b_k \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v_0(x)\sin(kx)\,dx \;=\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\cos x - 1 + \frac{2x}{\pi}\right)\sin(kx)\,dx$$

Elementare Berechnung der Teilintegrale:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos x \sin(kx)\,dx &= \sin x \sin(kx)\big|_0^{\pi} - k\int_0^{\pi} \sin x \cos(kx)\,dx \\
&= -k\left(-\cos x\cos(kx)\big|_0^{\pi} - k\int_0^{\pi}\cos x\sin(kx)\,dx\right) \\
&= k(-(-1)^k - 1) + k^2\int_0^{\pi}\cos x \sin(kx)\,dx
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi} \cos x \sin(kx)\,dx = \begin{cases} 0 & ;\; k \text{ ungerade} \\ \dfrac{2k}{k^2-1} & ;\; k \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi}\left(-1 + \frac{2x}{\pi}\right)\sin(kx)\,dx &= \frac{1}{k}\left(1 - \frac{2x}{\pi}\right)\cos(kx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{k}\left(-(-1)^k - 1\right) = \begin{cases} 0 & ;\; k \text{ ungerade} \\ -\dfrac{2}{k} & ;\; k \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad b_k = \begin{cases} 0 & ;\; k \text{ ungerade} \\ -\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{2}{k} + \dfrac{2k}{1-k^2}\right) & ;\; k \text{ gerade} \end{cases}$$

c) Das Ausgangsproblems wird dann gelöst durch:

$$u(x,t) = 1 - \frac{2x}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} + \frac{4n}{1-4n^2}\right) e^{-12n^2 t}\sin(2nx)\,.$$

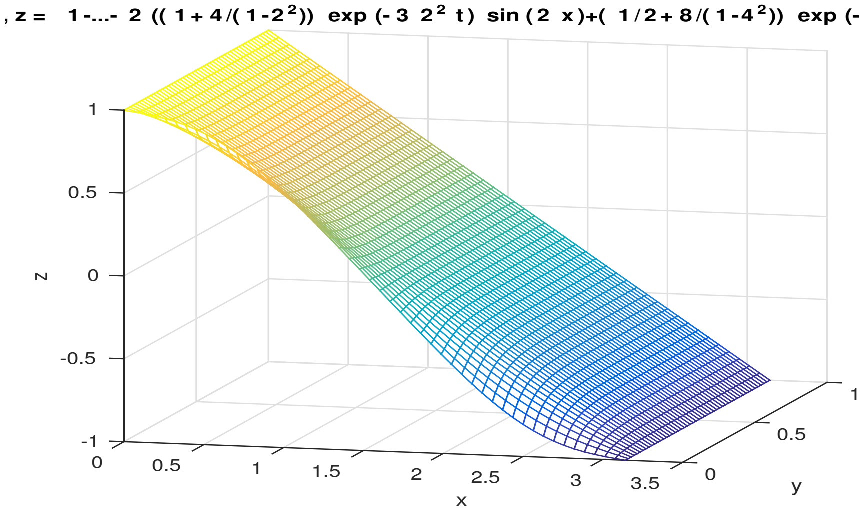

Bild 19 Näherung für $u(x,t)$ mit den ersten zwei Summanden der obigen Reihe

MATLAB-Plotbefehl

```
ezmesh('x','t','1-2*x/pi-2*((1+4/(1-2^2))*exp(-3*2^2*t)*sin(2*x)
+(1/2+8/(1-4^2))*exp(-3*4^2*t)*sin(4*x))/pi',[0,1,0,pi])
```

d) Nach dem Maximumprinzip wird der Maximalwert von u auf dem Rand von G z.B. für $x = 0$ angenommen. Damit gilt

$$\max_{(x,t)\in G} u(x,t) = 1\,.$$

Aufgabe 20:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ t > 0\,, \\ u(x,0) &= e^{2x+3} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) unter Verwendung der Fundamentallösung und

b) mit Hilfe eines Produktansatzes.

Lösung:

a) Für die Dimension $n = 1$ lautet die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0\,, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t < 0\,. \end{cases}$$

Mit der Fundamentallösung kann die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für $t > 0$ dargestellt werden durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y,t) \cdot u(y,0)\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-y)^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{2y+3}\, dy \\ &= \frac{e^3}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(x-y)^2 + 8ty}{4t} \right) dy \\ &= \frac{e^3}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(y^2 - 2(x+4t)y + x^2)}{4t} \right) dy \\ &= \frac{e^3}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-((y-(x+4t))^2 + x^2 - (x+4t)^2)}{4t} \right) dy \\ &= e^{2x+4t+3} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y-(x+4t))^2}{4t} \right) dy \\ &= e^{2x+4t+3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(y-(x+4t),t)\, dy = e^{2x+4t+3} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p,t)\, dp \\ &= e^{2x+4t+3} \end{aligned}$$

b) Der Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: \mu \; = (\text{konst})\,.$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T' - \mu T = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = Ce^{\mu t}\,,$$

$$X'' - \mu X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = a_1 e^{\sqrt{\mu}x} + a_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$$

und damit die Lösung aus dem Produktansatz

$$u(x,t) = Ce^{\mu t}\left(a_1 e^{\sqrt{\mu}x} + a_2 e^{-\sqrt{\mu}x}\right)\,.$$

Einsetzen der Anfangsbedingung und Koeffizientenvergleich ergibt

$$e^{2x+3} = e^{2x}e^3 = u(x,0) = C\left(a_1 e^{\sqrt{\mu}x} + a_2 e^{-\sqrt{\mu}x}\right) \Rightarrow Ca_1 = e^3,\ \sqrt{\mu} = 2,\ a_2 = 0.$$

Die Lösung aus dem Produktansatz lautet also

$$u(x,t) = e^{2x+4t+3}\,.$$