Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 4

Aufgabe 13:

a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ folgende allgemeine Lösung besitzt:

$$u(x,t) = v(x+ct) + w(x-ct)\ , \quad v, w \in C^2 .$$

Tipp: Man transformiere u auf die Koordinaten $\xi = x + ct$ und $\eta = x - ct$ und berechne die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung.

b) Man zeige, dass die folgende Randwertaufgabe für die Wellengleichung keine Lösung besitzt und damit kein korrekt gestelltes Problem ist

$$\begin{aligned}
u_{tt} &= u_{xx}\ , & 0 < x, t < 1\\
u(x,0) &= x\ , & 0 \le x \le 1\ ,\\
u(x,1) &= 1 + x(x-1)\ , &\\
u(0,t) &= t\ , & 0 \le t \le 1\ ,\\
u(1,t) &= 1\ . &
\end{aligned}$$

Man überprüfe auch, ob die vorgegebenen Randwerte in den Eckpunkten verträglich sind.

Lösung:

a) Die Kettenregel ergibt für $u(\xi(x,t), \eta(x,t))$:

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta\ ,$

$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}\ ,$

$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = cu_\xi - cu_\eta\ ,$

$u_{tt} = c(u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t) - c(u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t) = c^2 u_{\xi\xi} - 2c^2 u_{\xi\eta} + c^2 u_{\eta\eta}$

Man erhält $u_{tt} = c^2 u_{xx} \Leftrightarrow 4c^2 u_{\xi\eta} = 0\,.$

Durch Integration nach η und ξ erhält man die allgemeine Lösung

$$u(\xi,\eta) = v(\xi) + w(\eta) \ \Leftrightarrow\ u(x,t) = v(x+ct) + w(x-ct).$$

b) Zunächst wird die Kompatibilität in den Eckpunkten überprüft:

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= x && \Rightarrow \; u(0,0)=0\,,\; u(1,0)=1 \\
u(x,1) &= 1+x(x-1) && \Rightarrow \; u(0,1)=1\,,\; u(1,1)=1\,, \\
u(0,t) &= t && \Rightarrow \; u(0,0)=0\,,\; u(0,1)=1 \\
u(1,t) &= 1 && \Rightarrow \; u(1,0)=1\,,\; u(1,1)=1\,.
\end{aligned}$$

Hier ergibt sich also kein Widerspruch.

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung besitzt mit $c = 1$ die Darstellung

$$u(x,t) = v(x+t) + w(x-t)\,,$$

wobei v, w noch zu bestimmende unbekannte Funktionen sind. Eingesetzt in die Randdaten ergibt sich damit

$$\begin{aligned}
u(x,0) &= x = v(x) + w(x) \quad \Rightarrow \quad t = v(t) + w(t) \\
u(0,t) &= t = v(t) + w(-t)
\end{aligned}$$

Damit muss w eine gerade Funktion sein, d.h. es gilt unten $w(x-1) = w(1-x)$.

$$\begin{aligned}
u(x,1) &= 1 + x(x-1) = v(x+1) + w(x-1) = v(1+x) + w(1-x) \\
u(1,t) &= 1 = v(1+t) + w(1-t)
\end{aligned}$$

Dies führt auf den Widerspruch $1 = 1 + x(x-1)$, da $x \in [0,1]$ beliebig.

Aufgabe 14:

Man löse die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\,, \quad 0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < \pi, \\ u(x,0) &= 0\,, \quad u(x,\pi) = 0\,, \quad 0 \le x \le 2\pi \\ u(0,y) &= y(\pi - y)\,, \quad u(2\pi,y) = 0\,, \quad 0 \le y \le \pi \end{aligned}$$

durch einen Separationsansatz der Form $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$, berechne minimalen und maximalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Lösung:

Einsetzen von $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ in die Differentialgleichung ergibt

$$f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0.$$

Durch Separation erhält man

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g''(y)}{g(y)} =: \lambda\,.$$

Da die obigen Quotienten für alle x und y gelten, müssen sie notwendig konstant sein. Diese Konstante werde mit λ bezeichnet. Damit ergeben sich zwei gewöhnliche Differentialgleichungen in x bzw. in y

$$f''(x) - \lambda f(x) = 0 \quad \text{und} \quad g''(y) + \lambda g(y) = 0\,.$$

Der Produktansatz in die Randbedingungen eingesetzt ergibt

$$0 = u(x,0) = f(x)g(0) \quad \Rightarrow \quad g(0) = 0 \quad (\text{sonst gilt} \quad f \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0)\,,$$

$$0 = u(x,\pi) = f(x)g(\pi) \quad \Rightarrow \quad g(\pi) = 0.$$

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe

$$g''(y) + \lambda g(y) = 0 \quad \text{mit} \quad g(0) = 0 = g(\pi),$$

besitzt folgende Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen

$$\lambda_k = k^2\,, \quad g_k(y) = \sin ky.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung von $f''(x) - k^2 f(x) = 0$

$$f_k(x) = \tilde{c}_k e^{kx} + \tilde{d}_k e^{-kx} = c_k \cosh kx + d_k \sinh kx\,.$$

Mit $0 = u(2\pi,y) = f(2\pi)g(y) \Rightarrow f(2\pi) = 0$ und man erhält mit Hilfe der Funktionalgleichung $\sinh(s+t) = \sinh s \cosh t + \cosh s \sinh t$

$$f_k(x) = b_k \sinh k(x - 2\pi).$$

Da die Differentialgleichung linear ist erhält man durch Superposition eine Lösungsdarstellung der Form

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh k(x-2\pi) \sin ky \,.$$

Über die verbleibende Randbedingung

$$y(\pi - y) = u(0,y) = \sum_{k=1}^{\infty} -b_k \sinh 2k\pi \sin ky \,.$$

ergeben sich die b_k aus den Fourierkoeffizienten von $y(\pi - y)$:

$$-b_k \sinh 2k\pi = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} y(\pi - y) \sin ky \, dy = -\frac{4((-1)^k - 1)}{k^3 \pi} \,.$$

Die Lösung lautet daher $\quad u(x,y) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{4((-1)^k - 1) \sinh k(x-2\pi)}{k^3 \pi \sinh 2k\pi} \sin ky \,.$

Nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen werden minimaler und maximaler Funktionswert auf dem Rand angenommen. Hier sind es also die Extrema von $u(0,y) = y(\pi - y)$ mit $0 \le y \le \pi$:

$$u_{\min} = u\,(0,0) = 0 \,, \quad u_{\max} = u\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

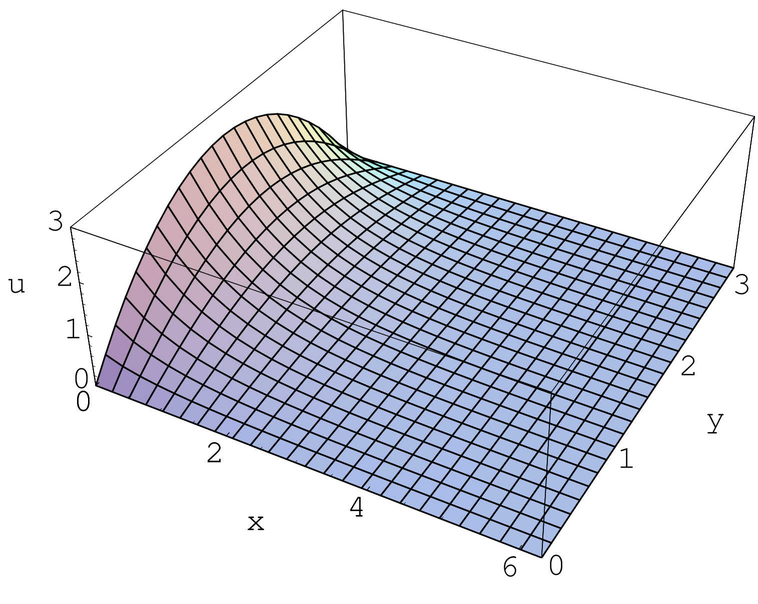

Bild 14 Partialsumme von $u(x,y)$ mit Summation $k = 1, ..., 10$.

Aufgabe 15:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Kreis $r = \sqrt{x^2+y^2} < 7$ (in Polarkoordinaten):

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \; ,$$

$$u(7,\varphi) = 5 - 28\cos\varphi + 14\sin(2\varphi) + 21\cos(3\varphi) \; ,$$

gebe sie in kartesischen Koordinaten an und zeichne sie.

Lösung:

Der Produktansatz $u(r,\varphi) = R(r)\cdot\Phi(\varphi)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 R''\Phi + rR'\Phi + R\Phi'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \lambda$$

Da $\Phi(\varphi)$ im Kreis 2π-periodisch sein muss $(\Phi(0) = \Phi(2\pi))$, erhält man nichttriviale Lösungen $\Phi(\varphi)$ nur für $\lambda \geq 0$, nämlich für $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_k = k^2$:

$$\Phi_0(\varphi) = a_0 \; , \quad \Phi_k(\varphi) = a_k\sin(k\varphi) + b_k\cos(k\varphi) \; , \quad k = 1,2,\ldots$$

Setzt man $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_k = k^2$ in die Differentialgleichung für $R(r)$ ein, so erhält man dort die Lösungen

$$R_0(r) = c_0 + d_0\ln r \; , \quad R_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k} \; .$$

Da der Nullpunkt zum Definitionsbereich von u gehört, entfallen die singulären Lösungen, d.h. es muss $d_k = 0$ gewählt werden.

Durch Superposition ergibt sich aus dem Produktansatz damit die Lösungsdarstellung im Kreis

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k\cos(k\varphi) + B_k r^k\sin(k\varphi) \; .$$

Einsetzen der Randbedingung ergibt

$$\begin{aligned} u(7,\varphi) &= 5 - 28\cos\varphi + 14\sin(2\varphi) + 21\cos(3\varphi) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k 7^k\cos(k\varphi) + B_k 7^k\sin(k\varphi) \; . \end{aligned}$$

Mit einem Koeffizientenvergleich erhält man

$$A_0 = 5 \; , \; 7A_1 = -28 \;\Rightarrow\; A_1 = -4 \; , \; B_2 7^2 = 14 \;\Rightarrow\; B_2 = \frac{2}{7} \; , \; A_3 7^3 = 21 \;\Rightarrow\; A_3 = \frac{3}{49}$$

und $A_k = 0 = B_k$ sonst. Damit lautet die Lösung

$$u(r,\varphi) = 5 - 4r\cos\varphi + \frac{2r^2}{7}\sin(2\varphi) + \frac{3r^3}{49}\cos(3\varphi)$$

Umwandlung in kartesische Koordinaten $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ mit $\sin(2\varphi) = 2\sin\varphi\cos\varphi$ und $\cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$:

$$\begin{aligned} u(r,\varphi) &= 5 - 4r\cos\varphi + \frac{2r^2}{7} 2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{3r^3}{49}(4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi) \\ \Rightarrow\ u(x,y) &= 5 - 4x + \frac{4xy}{7} + \frac{12x^3}{49} - \frac{9x(x^2+y^2)}{49}. \end{aligned}$$

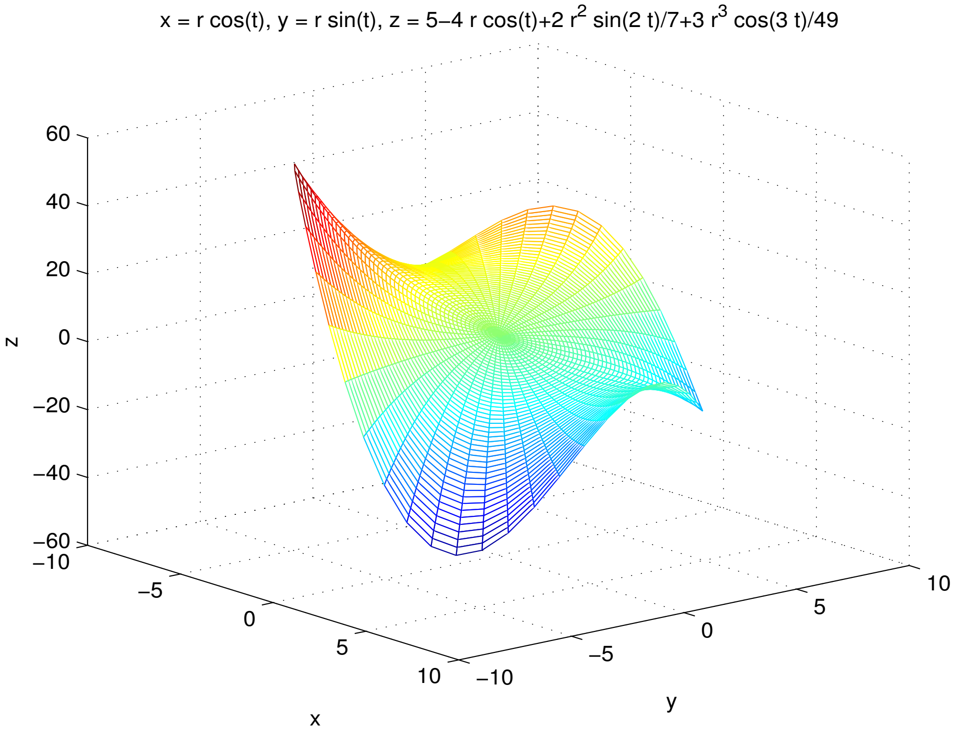

Bild 15 Lösung $u(r,\varphi)$

Aufgabe 16:

a) Man zeige, dass der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^2$ invariant gegenüber Verschiebungen ist, d.h. für die um $(a,b)^T$ verschobenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

gilt $u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$.

b) Unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft berechne man für die Lösung u des Problems

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad &\text{für} \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 + (y+3)^2 < 4\,, \\ u(x,y,z) = xyz \quad &\text{für} \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4 \end{aligned}$$

den Wert $u(-1,2,-3)$.

Lösung:

a) Für die Koordinaten $\xi = x + a$ und $\eta = y + b$ erhält man:

$$\xi_x = 1\,,\ \eta_x = 0\,,\ \xi_y = 0\,,\ \eta_y = 1\,.$$

Nach der Kettenregel gilt daher

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi \quad \Rightarrow \quad u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x = u_{\xi\xi} \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = u_\eta \quad \Rightarrow \quad u_{yy} = u_{\eta\xi}\xi_y + u_{\eta\eta}\eta_y = u_{\eta\eta} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}\,.$$

b) Die Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen u im $\mathbb{R}^3$ besagt, dass sich der Funktionswert von u im Mittelpunkt $\boldsymbol{x}_0$ einer Kugel vom Radius R berechnen lässt durch Integration über die Kugeloberfläche

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \int\limits_{||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0|| = R} u(\boldsymbol{x})\, do\,.$$

Für den in der Aufgabenstellung vorliegenden Fall $\boldsymbol{x}_0 = (-1,2,-3)$ und $R = 2$ berechnen wir das Oberflächenintegral 1.Art durch Parametrisierung der Kugeloberfläche in Kugelkoordinaten

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}(\varphi,\psi) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi\cos\psi - 1 \\ 2\sin\varphi\cos\psi + 2 \\ 2\sin\psi - 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \left\| \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \psi} \right\| = 2^2 \cos\psi \quad \Rightarrow \quad do = 2^2 \cos\psi d\psi d\varphi.$$

$$\begin{aligned} u(-1,2,-3) &= \frac{1}{4\pi 2^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (2\cos\varphi\cos\psi - 1) \\ &\quad (2\sin\varphi\cos\psi + 2)(2\sin\psi - 3) 2^2 \cos\psi \, d\psi d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 6\cos\psi \, d\psi d\varphi = 6 \end{aligned}$$

Bemerkung:
$u(x,y,z) = xyz$ erfüllt $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ und löst daher die Randwertaufgabe selbst. Es gilt also $u(-1,2,-3) = (-1)2(-3) = 6$.