Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4 vom 16.6.-19.6.

Aufgabe 13:

a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ folgende allgemeine Lösung besitzt:

$$u(x,t) = v(x+ct) + w(x-ct)\ , \quad v, w \in C^2.$$

Tipp: Man transformiere u auf die Koordinaten $\xi = x + ct$ und $\eta = x - ct$ und berechne die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung.

b) Man zeige, dass die folgende Randwertaufgabe für die Wellengleichung keine Lösung besitzt

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}\ , && 0 < x, t < 1 \\ u(x,0) &= x\ , && 0 \le x \le 1\ , \\ u(x,1) &= 1 + x(x-1)\ , && \\ u(0,t) &= t\ , && 0 \le t \le 1\ , \\ u(1,t) &= 1\ . && \end{aligned}$$

Man überprüfe auch, ob die vorgegebenen Randwerte in den Eckpunkten verträglich sind.

Aufgabe 14:

Man löse die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0\ , \quad 0 < x < 2\pi, \quad 0 < y < \pi, \\ u(x,0) &= 0\ , \quad u(x,\pi) = 0\ , \quad 0 \le x \le 2\pi \\ u(0,y) &= y(\pi - y)\ , \quad u(2\pi, y) = 0\ , \quad 0 \le y \le \pi \end{aligned}$$

durch einen Separationsansatz der Form $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$, berechne minimalen und maximalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Aufgabe 15:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Kreis $r = \sqrt{x^2+y^2} < 7$ (in Polarkoordinaten):

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \, ,$$

$$u(7,\varphi) = 5 - 28\cos\varphi + 14\sin(2\varphi) + 21\cos(3\varphi) \, ,$$

gebe sie in kartesischen Koordinaten an und zeichne sie.

Aufgabe 16:

a) Man zeige, dass der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^2$ invariant gegenüber Verschiebungen ist, d.h. für die um $(a,b)^T$ verschobenen Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

gilt $u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$.

b) Unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft berechne man für die Lösung u des Problems

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} &= 0 \quad \text{für} \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 + (y+3)^2 < 4 \, , \\ u(x,y,z) &= xyz \quad \text{für} \quad (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4 \end{aligned}$$

den Wert $u(-1,2,-3)$.