Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 3

Aufgabe 9:

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \quad \text{mit} \quad u(x,0) = u_0(x)\,.$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

b) Man löse die Aufgabe für die Anfangsdaten

(i) $u_0(x) = 4x\,,$

(ii) $u_0(x) = -4x\,,$

zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem die Lösung existiert.

Lösung:

a) Der quasilinearen Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0$$

wird das erweiterte Problem

$$U_t + uU_x + 0 \cdot U_u = 0$$

zugeordnet. Lösen der Phasendifferentialgleichungen mit $t = s$, $x = x(s) = x(t)$ und $u = u(s) = u(t)$:

$u'(t) = 0 \Rightarrow u(t) = C$

$x'(t) = u = C \Rightarrow x = Ct + D \Rightarrow D = x - ut$

Damit wird die allgemeine Lösung durch die folgende implizite Gleichung mit einer C^1-Funktion Φ beschrieben:

$$U(t, x, u) = \Phi\,(u, x - ut) = 0\,.$$

Angenommen diese implizite Lösungsdarstellung lässt sich nach dem Satz über implizite Funktionen nach der ersten Komponente auflösen, so erhält man mit einer unbekannten Funktion ψ die implizite Lösungsdarstellung

$$u(x, t) = \psi\,(x - u(x, t)t)\ .$$

b) (i) Die Anfangsbedingung $u_0(x) = 4x$ führt auf

$$4x = u_0(x) = u(x, 0) = \psi\,(x - u(x, 0) \cdot 0) = \psi(x)\,.$$

Die implizite Lösungsdarstellung der Anfangswertaufgabe lautet also

$$u(x, t) = \psi\,(x - u(x, t)t) = 4(x - u(x, t)t)\,.$$

Auflösen nach u ergibt für alle $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ die Lösung in expliziter Darstellung

$$u(x, t) = \frac{4x}{4t + 1}\,.$$

Charakteristische Grundkurve: $(x(t), t)$ mit $x(0) = x_0$

$x(t) = Ct + D \Rightarrow x_0 = x(0) = D$ und

$C = u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x_0)$ also

$$x(t) = u_0(x_0)t + x_0 = 4x_0 t + x_0\,.$$

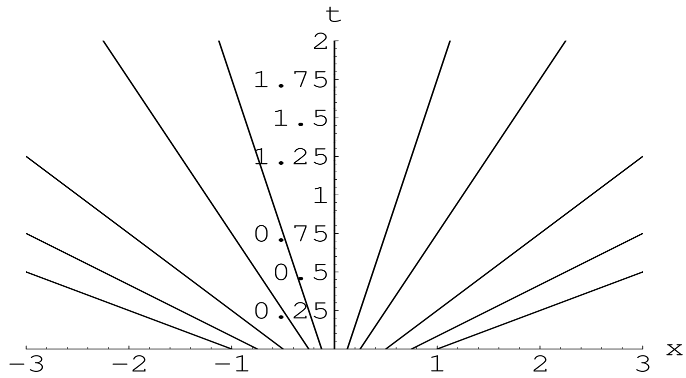

Bild 9 b) (i): $x(t) = 4x_0t + x_0$

(ii) Die Anfangsbedingung $u_0(x) = -4x$ führt auf

$$-4x = u(x,0) = \psi\left(x - u(x,0)\cdot 0\right) = \psi(x)\,.$$

Die implizite Lösungsdarstellung der Anfangswertaufgabe lautet also

$$u(x,t) = \psi\left((x - u(x,t)t\right) = -4\left(x - u(x,t)t\right)\,.$$

Auflösen nach u ergibt für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times \left(0, \frac{1}{4}\right)$ die explizite Darstellung

$$u(x,t) = -\frac{4x}{1-4t}\,.$$

Für $T = 1/4$ besitzt diese Lösung eine Singularität.
Charakteristische Grundkurve: $x(t) = -4x_0t + x_0$.

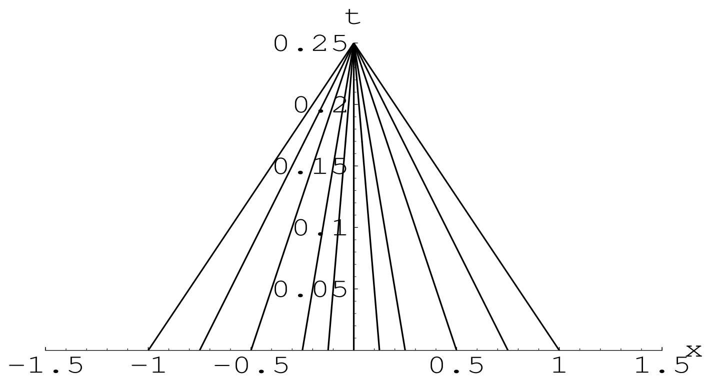

Bild 9 b) (ii): $x(t) = -4x_0t + x_0$

Im Punkt $(x,t) = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ schneiden sich alle charakteristischen Grundkurven.

Aufgabe 10:

Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$$

mit

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} -1 & , \qquad\quad x \leq -1 \\ 1 & , \; -1 < x \leq 1 \\ 0 & , \quad 1 < x \end{cases} .$$

a) Man berechne die Entropielösung für $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,4)$.

b) Man zeichne die Grundcharakteristiken ggf. mit Stoßfront im Rechteck $(x,t) \in (-2,3) \times (0,4)$.

c) Man zeichne $u(x,0)$, $u(x,1)$, $u(x,2)$, $u(x,3)$, $u(x,4)$.

Lösung:

a) Der Sprung von u_0 bei $x_0 = -1$ erzeugt eine Verdünnungswelle u_v. Mit $u_l = -1 < u_r = 1$ erhält man

$$u_v(x,t) = \begin{cases} -1 & , \qquad\qquad x \leq -1-t \\ \dfrac{x+1}{t} & , \; -1-t < x \leq -1+t \\ 1 & , \; -1+t < x \end{cases}$$

Die Entropiebedingung: $\exists\, C > 0$ mit

$$u(x+z,t) - u(x,t) < \frac{Cz}{t} \quad \text{für} \quad t, z > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

wird von u_v, auf Grund der Stetigkeit von u_v, erfüllt.

Außerdem kann man eine Stoßwelle u_s berechnen. Die Rankine-Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = \frac{1}{2}(-1+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad s(t) = C$$

Mit $s(0) = x_0 = -1$ erhält man die Stoßfront $s_0(t) = -1$ und damit die Stoßwelle:

$$u_s(x,t) = \begin{cases} -1 & , \qquad\quad x \leq -1 \\ 1 & , \; -1 < x \end{cases} .$$

Die Entropiebedingung für u_s ergibt z.B für $x = -1$ einen Widerspruch

$$u_s(-1+z,t) - u_s(-1,t) = 1 - (-1) = 2 < \frac{Cz}{t} .$$

Diese Bedingung ist nur für $\dfrac{2t}{C} < z$ und nicht für alle $z > 0$ erfüllt. Also ist u_v die Entropielösung.

Der Sprung von u_0 bei $x_1 = 1$ führt nur zu einer Stoßwelle mit $u_l = 1 > u_r = 0$. Eine Verdünnungswelle ist hier nicht definiert.

Die Rankine-Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = \frac{1}{2}(1+0) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \frac{t}{2} + C$$

Mit $s(0) = x_1 = 1$ erhält man die Stoßfront $s_1(t) = \dfrac{t}{2} + 1$ und damit die Stoßwelle:

$$u_s(x,t) = \begin{cases} 1 \quad , & x \leq \dfrac{t}{2} + 1 \\ 0 \quad , & \dfrac{t}{2} + 1 < x \quad . \end{cases}$$

Die Entropiebedingung ist wegen $u(x+z,t) - u(x,t) \leq 0 < \dfrac{Cz}{t}$ für alle $C > 0$ automatisch erfüllt.

Damit lautet die gesamte Entropielösung also

$$u(x,t) = \begin{cases} -1 \quad , & x \leq -1-t \\ \dfrac{x+1}{t} \quad , & -1-t < x \leq -1+t \\ 1 \quad , & -1+t < x \leq \dfrac{t}{2} + 1 \\ 0 \quad , & \dfrac{t}{2} + 1 < x \quad . \end{cases}$$

Diese Lösung ist jedoch nur für $-1 + t \leq \dfrac{t}{2} + 1 \;\Rightarrow\; t \leq 4 =: T$ definiert, also nur bis zu dem Zeitpunkt, wo die Verdünnungswelle auf die Stoßfront der Stoßwelle trifft, danach ändert sich der Verlauf der Stoßfront.

b)

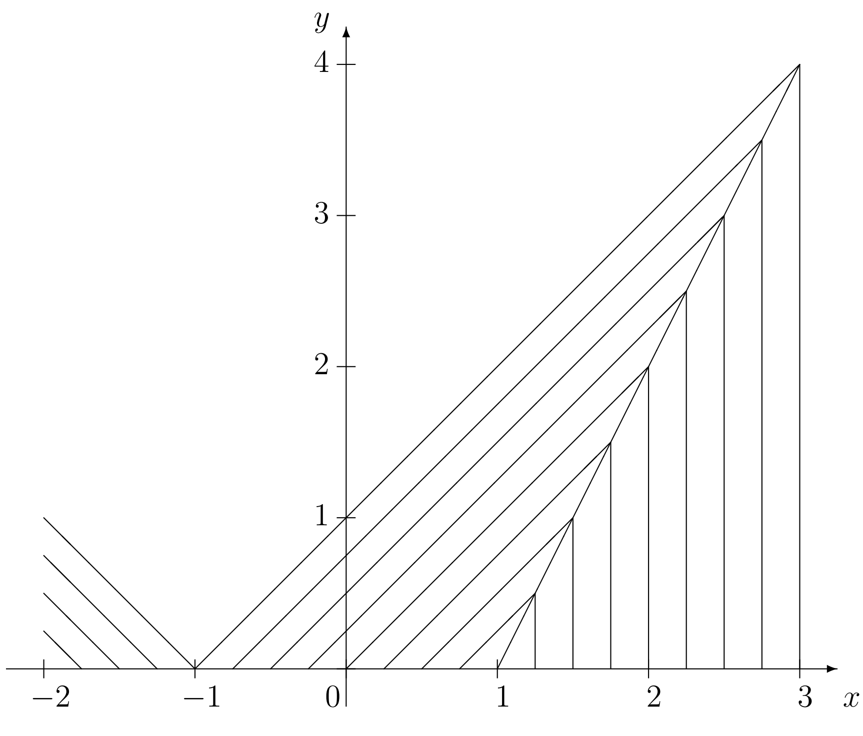

Bild 10 b) Grundcharakteristiken mit Stoßfront

c)

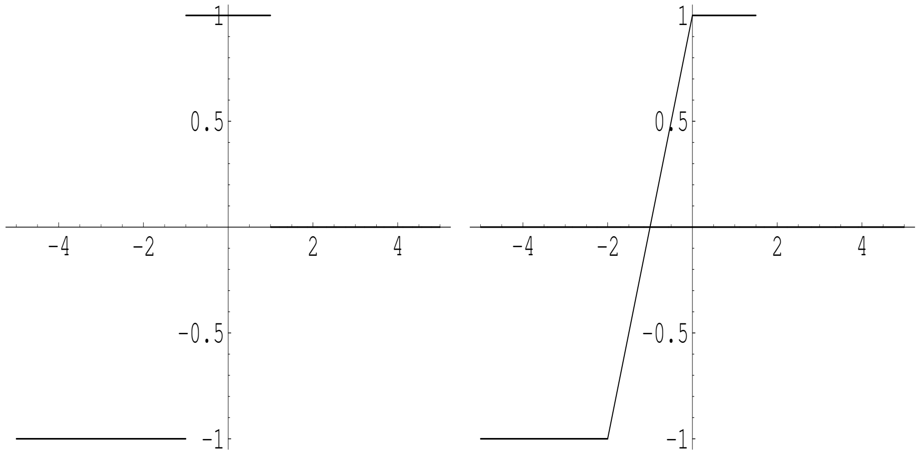

Bild 10 c) (i): $u(x, 0)$, $u(x, 1)$

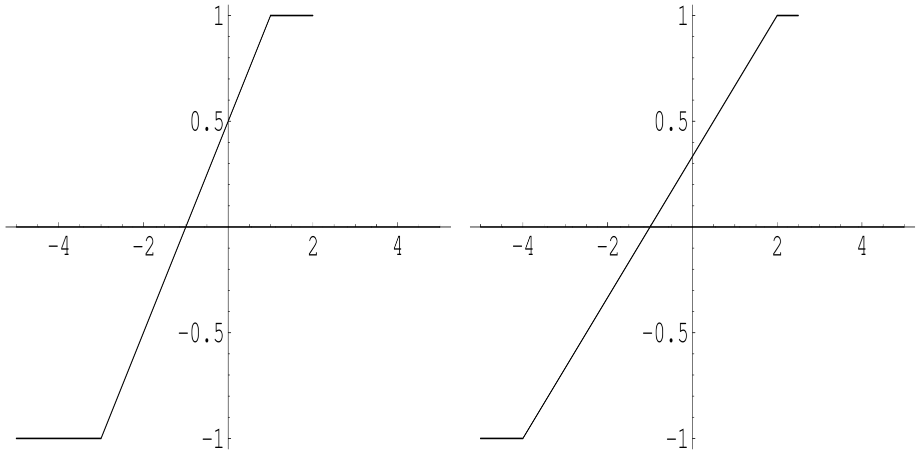

Bild 10 c) (ii): $u(x, 2)$, $u(x, 3)$

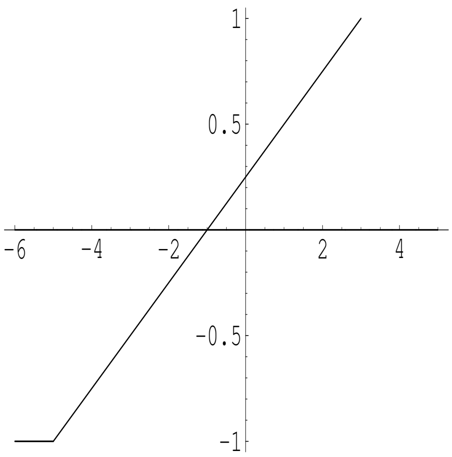

Bild 10 c) (iii): $u(x, 4)$

Aufgabe 11:

Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

a) $3u_{xx} + 4u_{xy} - xu_x = x^2y$,

b) $xu_{xx} + 4u_{xy} + yu_{yy} + (x^2 + y^2)u = 3$,

c) $u_{xx} + 2u_{xz} + 2u_{yy} - u_{zz} + zu_x + xu_y + yu_z - u = 7$.

Lösung:

a) $$3u_{xx} + 4u_{xy} - xu_x = x^2y \quad \Leftrightarrow \quad \nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \nabla u + (-x, 0)\nabla u = x^2y$$

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda - 4)(\lambda + 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 4\,,\ \lambda_2 = -1$$

Damit ist die Differentialgleichung in ganz $\mathbb{R}^2$ von hyperbolischem Typ.

b) $$xu_{xx} + 4u_{xy} + yu_{yy} + (x^2 + y^2)u = 3$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} x & 2 \\ 2 & y \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \nabla u - (1,1)\,\nabla u + (x^2 + y^2)u = 3$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det \boldsymbol{A} = xy - 4 \begin{cases} > 0 & \text{(elliptisch)}, \quad x > 0 \wedge y > \dfrac{4}{x} \vee x < 0 \wedge y < \dfrac{4}{x} \\ = 0 & \text{(parabolisch)}, \quad y = \dfrac{4}{x} \\ < 0 & \text{(hyperbolisch)}, \quad \text{sonst} \end{cases}$$

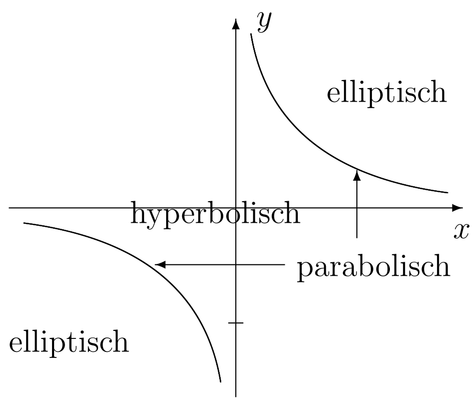

Bild 11 b) Gebiete unterschiedlichen Typs

c) $u_{xx} + 2u_{xz} + 2u_{yy} - u_{zz} + zu_x + xu_y + yu_z - u = 7$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:\,\boldsymbol{A}} \nabla u + (z, x, y)\nabla u - u = 7$$

$$\det(\,\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{I}\,) = (2-\lambda)((1-\lambda)(-1-\lambda)-1) = (2-\lambda)(\lambda-\sqrt{2})(\lambda+\sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = -\sqrt{2}\,, \quad \lambda_2 = \sqrt{2}\,, \quad \lambda_3 = 2$$

Damit ist die Differentialgleichung in ganz $\mathbb{R}^3$ von hyperbolischem Typ.

Aufgabe 12:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{14}{5}u_{xx} - \frac{4}{5}u_{xy} + \frac{11}{5}u_{yy} + 2\sqrt{5}u_x - \sqrt{5}u_y + 3u = x$$

a) Man bestimme den Typ der Gleichung und

b) transformiere sie auf Normalform.

Lösung:

a)
$$\frac{14}{5}u_{xx} - \frac{4}{5}u_{xy} + \frac{11}{5}u_{yy} + 2\sqrt{5}u_x - \sqrt{5}u_y + 3u = x$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & \frac{11}{5} \end{pmatrix}}_{=:\,\boldsymbol{A}} \nabla u + (2\sqrt{5}, -\sqrt{5})\nabla u + 3u = x$$

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (\lambda - 2)(\lambda - 3) \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 2\,,\ \lambda_2 = 3$$

Es handelt sich damit in ganz $\mathbb{R}^2$ um eine elliptische Differentialgleichung.

b) Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ von $\boldsymbol{A}$ und Transformationsmatrix $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit den neuen Variablen

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} := \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

wird die Ausgangsgleichung nach der Kettenregel transformiert und in eine Gleichung in $\tilde{u}(\xi,\eta) := u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ überführt:

$$2\tilde{u}_{\xi\xi} + 3\tilde{u}_{\eta\eta} + 5\tilde{u}_\eta + 3\tilde{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\xi + 2\eta)\,.$$

Erneute Transformation mit den Variablen

$$\mu := \frac{\xi}{\sqrt{2}}\,,\ \nu := \frac{\eta}{\sqrt{3}}$$

führt auf die elliptische Normalform in $\hat{u}(\mu,\nu) := \tilde{u}(\xi(\mu,\nu), \eta(\mu,\nu))$

$$\Delta\hat{u} + \frac{5}{\sqrt{3}}\hat{u}_\nu + 3\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\sqrt{2}\mu + 2\sqrt{3}\nu)\,.$$