Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3 26.5.-29.5

Aufgabe 9:

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \quad \text{mit} \quad u(x,0) = u_0(x)\,.$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

b) Man löse die Aufgabe für die Anfangsdaten

 (i) $u_0(x) = 4x\,,$
 (ii) $u_0(x) = -4x\,,$

 zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem die Lösung existiert.

Aufgabe 10:

Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$$

mit

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} -1 & , \qquad\quad x \le -1 \\ \;\;1 & , \quad -1 < x \le 1 \\ \;\;0 & , \qquad 1 < x \;. \end{cases}$$

a) Man berechne die Entropielösung für $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,4)\,.$

b) Man zeichne die Grundcharakteristiken ggf. mit Stoßfront im Rechteck $(x,t) \in (-2,3) \times (0,4)$.

c) Man zeichne $u(x,0),\ u(x,1),\ u(x,2),\ u(x,3),\ u(x,4)$.

Aufgabe 11:

Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

a) $3u_{xx} + 4u_{xy} - xu_x = x^2 y$,

b) $xu_{xx} + 4u_{xy} + yu_{yy} + (x^2 + y^2)u = 3$,

c) $u_{xx} + 2u_{xz} + 2u_{yy} - u_{zz} + zu_x + xu_y + yu_z - u = 7$.

Aufgabe 12:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{14}{5}u_{xx} - \frac{4}{5}u_{xy} + \frac{11}{5}u_{yy} + 2\sqrt{5}u_x - \sqrt{5}u_y + 3u = x$$

a) Man bestimme den Typ der Gleichung und

b) transformiere sie auf Normalform.