Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 2

Aufgabe 5:

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$4u_x + \frac{1}{3y^2}\, u_y = 0 \,.$$

Lösung:

Charakteristische Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) = 4 \quad &\Rightarrow \quad x(t) = 4t + C_1 \quad \Rightarrow \ t = \frac{x - C_1}{4} \\
\dot{y}(t) = \frac{1}{3y^2} \quad &\Rightarrow \quad 3y^2(t)\dot{y}(t) = 1 \\
&\Rightarrow \quad y^3 = t + C_2 = \frac{x - C_1}{4} + C_2 = \frac{x}{4} + \underbrace{C_2 - \frac{C_1}{4}}_{=C}
\end{aligned}$$

Auflösen nach C: $\quad C = y^3 - \dfrac{x}{4}$

Damit ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$u(x,y) = \Phi\left(y^3 - \frac{x}{4}\right)$$

mit einer beliebigen C^1-Funktion Φ.

Aufgabe 6:

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$zu_x + yu_z = 0\,.$$

Lösung:

Hier werden drei alternative Möglichkeiten des Lösens der charakteristischen Differentialgleichungen dargestellt:

a) Lösen als Phasendifferentialgleichungen:

$$zu_x + yu_z = 0 \quad \overset{z\neq 0}{\Leftrightarrow} \quad u_x + \frac{y}{z}\,u_z = 0$$

Die erste charakteristische Differentialgleichung lautet damit $\dot{x}(t) = 1$. Man erhält $x = t + C_1$, d.h. x und t sind bis auf Verschiebung um C_1 identisch. Für die weitere Lösung wählen wir $C_1 = 0$, also $x = t$ und berechnen $y = y(x), z = z(x)$.

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y = C_2$$

$$z' = \frac{y}{z} \quad \Rightarrow \quad z \cdot z' = y = C_2 \;\Rightarrow\; \frac{z^2}{2} = C_2 x + C_3 = yx + C_3 \Rightarrow C_3 = \frac{z^2}{2} - xy$$

b) elementares Lösen der charakteristischen Differentialgleichungen:

$$\dot{x} = z\,, \quad \dot{y} = 0\,, \quad \dot{z} = y\,.$$

(i) $\dot{y} = 0 \;\Rightarrow\; y = c_2\ (= C_2)$

(ii) $\dot{z} = y = c_2 \;\Rightarrow\; z = c_2 t + c_3 \;\Rightarrow\; t = \dfrac{z - c_3}{c_2}$

(iii) $\dot{x} = z = c_2 t + c_3 \;\Rightarrow$

$$x = \frac{c_2 t^2}{2} + c_3 t + c_1 = \frac{c_2(z-c_3)^2}{2c_2^2} + \frac{c_3(z-c_3)}{c_2} + c_1 \;\Rightarrow$$

$$xy = xc_2 = \frac{1}{2}(z^2 - 2c_3 z + c_3^2) + c_3 z - c_3^2 + c_1 c_2 = \frac{z^2}{2} - \frac{c_3^2}{2} + c_1 c_2 \;\Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{c_3^2}{2} - c_1 c_2}_{=C_3} = \frac{z^2}{2} - xy$$

c) Lösen der charakteristischen Differentialgleichungen als lineares System mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = -\lambda^3 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = 0$$

Man berechnet folgende Kette von Eigen- und Hauptvektoren:

Eigenvektor: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Hauptvektor 1.Stufe $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hauptvektor 2.Stufe $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung des Systems:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= k_1\boldsymbol{v}_1 + k_3\left(t\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2\right) + k_2\left(\frac{t^2}{2}\boldsymbol{v}_1 + t\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3\right) \\
&= \begin{pmatrix} k_1 + k_3(t+1) + k_2\left(\dfrac{t^2}{2} + t\right) \\ k_2 \\ k_2(t+1) + k_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (k_1 + k_3) + (k_2 + k_3)t + k_2\dfrac{t^2}{2} \\ k_2 \\ k_2 t + (k_2 + k_3) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Mit $c_2 = k_2$, $c_3 = k_2 + k_3$ und $c_1 = k_1 + k_3$ stimmt diese Darstellung mit ii. überein.

Mit $C_2 = y$ und $C_3 = \dfrac{z^2}{2} - xy$ ist die allgemeine Lösung gegeben durch

$$u(x, y, z) = \Phi\left(y, \frac{z^2}{2} - xy\right)$$

mit einer beliebigen C^1-Funktion Φ.

Aufgabe 7:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$u_x + \frac{2xy}{1+x^2} u_y = 0 \quad \text{mit} \quad u(0,y) = \cos y \,.$$

Lösung:

Charakteristische Differentialgleichungen: $\dot{x} = 1\,, \quad \dot{y} = \dfrac{2xy}{1+x^2}$

$\dot{x} = 1 \;\Rightarrow\; x = t + C_0$ mit $x(0) = 0$ folgt $C_0 = 0\,.$

Man erhält $x = t \;\Rightarrow\; \dfrac{d}{dt} = \dfrac{d}{dx}\,.$

$$y' = \frac{2xy}{1+x^2} \;\Rightarrow\; \frac{y'}{y} = \frac{2x}{1+x^2} \;\Rightarrow\; \ln|y| = \ln(1+x^2) + c$$

$$\Rightarrow\; y = C_1(1+x^2) \;\Rightarrow\; C_1 = \frac{y}{1+x^2}$$

allgemeine Lösung mit einer C^1-Funktion ψ: $\quad u(x,y) = \psi\left(\dfrac{y}{1+x^2}\right)$

Anfangsbedingung: $\quad \cos y = u(0,y) = \psi\left(\dfrac{y}{1+0^2}\right) = \psi\,(y)$

Lösung der Anfangswertaufgabe: $\quad u(x,y) = \cos\left(\dfrac{y}{1+x^2}\right)$

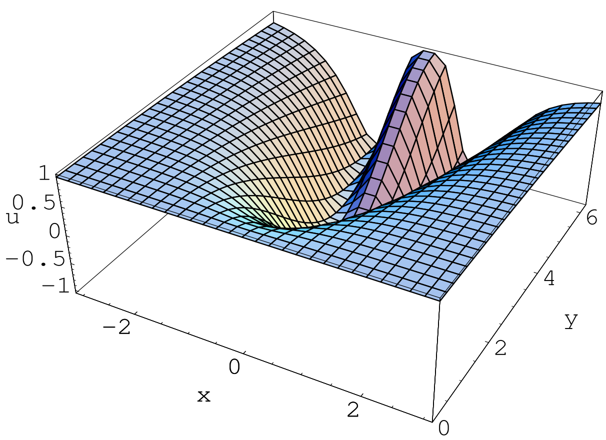

Bild 7): Lösung $u(x,y)$

Aufgabe 8:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$u_x + 3x^2 u_y = 1 \quad \text{mit} \quad u(0,y) = \sin y \, .$$

Lösung:

$u_x + 3x^2 u_y = 1 \quad \Rightarrow \quad U_x + 3x^2 U_y + U_u = 0$

Lösen der Phasendifferentialgleichungen bzgl x:

$\dot{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = t + C_0$

Durch die Parametrisierungsforderung $x(0) = 0$ wird $C_0 = 0$ festgelegt.

Man erhält $x = t \Rightarrow \dfrac{d}{dt} = \dfrac{d}{dx}$.

$y' = 3x^2 \Rightarrow y = x^3 + C_1 \Rightarrow C_1 = y - x^3$

$u' = 1 \Rightarrow u = x + C_2 \Rightarrow C_2 = u - x$

Damit wird die allgemeine Lösung durch die folgende implizite Gleichung mit einer C^1-Funktion Φ beschrieben:

$$U(x,y,u) = \Phi\left(y - x^3, u - x\right) = 0 \, .$$

Angenommen die implizite Lösungsdarstellung

$$\Phi\left(y - x^3, u - x\right) = 0$$

lässt sich nach dem Satz über implizite Funktionen nach der zweiten Komponente auflösen, so erhält man mit einer unbekannten Funktion ψ

$$u = x + \psi\left(y - x^3\right) \, .$$

Die Anfangsbedingung $u(0,y) = \sin y$ führt auf

$$\sin y = u(0,y) = 0 + \psi\left(y - 0^3\right) = \psi\left(y\right)$$

Die Lösung der Anfangswertaufgabe lautet also

$$u(x,y) = x + \sin(y - x^3)$$

Besprechung: 12.5.-15.5.