Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Prof. Dr. A. Iske
Dr. K. Rothe ©

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Lösungen zu Blatt 1

Aufgabe 1:

a) Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(i) $5u_x + yu_y + e^x u = \sin x\,,$

(ii) $uu_x + u_y + 4u = (x+y+u)^2\,,$

(iii) $u_{xx}u_{yy} - 3u_x + u = 0\,,$

(iv) $\Delta u - u^2 u_x = 0\,,$

(v) $\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix}.$

b) Man zeige, dass folgende Funktionen harmonisch sind:

(i) $v_1(x,y) = x^2 - y^2\,,$

(ii) $v_2(x,y) = e^y \sin x$

(iii) $v_3(x,y) = \mathrm{Re}(\sin z)$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Lösung:

a) (i) $5u_x + yu_y + e^x u = \sin x\,,$ skalar, linear, inhomogen, 1. Ordnung

(ii) $uu_x + u_y + 4u = (x+y+u)^2\,,$ skalar, quasilinear, 1. Ordnung

(iii) $u_{xx}u_{yy} - 3u_x + u = 0\,,$ skalar, nichtlinear, 2. Ordnung

(iv) $\Delta u - u^2 u_x = 0\,,$ skalar, semilinear, 2. Ordnung,

(v) $\begin{pmatrix} u_t \\ v_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ v_x \end{pmatrix},$ vektoriell, linear, 1. Ordnung,

Ist äquivalent zur Wellengleichung $w_{tt} = c^2 w_{xx}$ mit $w_t = u$ und $w_x = v$.

b) (i) $\Delta v_1 = (x^2 - y^2)_{xx} + (x^2 - y^2)_{yy} = 2 - 2 = 0$

(ii) $\Delta v_2 = (e^y \sin x)_{xx} + (e^y \sin x)_{yy} = -e^y \sin x + e^y \sin x = 0$

(iii)
$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^{y}}{2i} \\ &= \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i} \\ &= \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y \end{aligned}$$

$$\Delta v_3 = (\sin x \cosh y)_{xx} + (\sin x \cosh y)_{yy} = -\sin x \cosh y + \sin x \cosh y = 0$$

Aufgabe 2:

Man berechne die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

a) $u_{xx} - y^2 u = -yx + y^3$,

b) $u_{xy} = 3x^2 + 3y^2$,

c) $u_{xy} = 2yu_x$.

Lösung:

a) $u_{xx} - y^2 u = -yx + y^3$:

Fasst man y als Parameter auf, so kann diese partielle Differentialgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung aufgefasst werden in $v(x) := u(x, y)$:

(i) $y = 0$: $\quad v''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = v(x) = c_1(y)x + c_2(y)$

(ii) $y \neq 0$: $\quad v''(x) - y^2 v(x) = -yx + y^3$

Lösung der homogenen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v'' - y^2 v = 0$$

mit dem üblichen Ansatz $v(x) = e^{\lambda x}$, dabei kann λ von y abhängen, also $\lambda = \lambda(y)$ gelten.

$p(\lambda) = \lambda^2 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm y \quad \Rightarrow \quad v_h(x) = c_1(y)e^{yx} + c_2(y)e^{-yx}$

mit beliebigen Funktionen $c_1(y)$ und $c_2(y)$.

Lösung der inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v'' - y^2 v = -yx + y^3$$

mit dem üblichen Ansatz $v_p(x) = a(y)x + b(y)$:

$v'' - y^2 v = 0 - y^2(ax + b) = (-y^2 a)x - y^2 b = -yx + y^3$

$\Rightarrow \quad -y^2 a = -y \ \wedge \ -y^2 b = y^3 \quad \Rightarrow \quad a = \dfrac{1}{y} \ \wedge \ b = -y$

$\Rightarrow \quad v_p(x) = \dfrac{x}{y} - y$

$\Rightarrow \quad u(x, y) = v_h(x) + v_p(x) = c_1(y)e^{yx} + c_2(y)e^{-yx} + \dfrac{x}{y} - y$

b) $u_{xy} = (u_x)_y = 3x^2 + 3y^2 \quad \Rightarrow \quad u_x = 3x^2 y + y^3 + c(x)$

$\Rightarrow \quad u = x^3 y + xy^3 + f(x) + g(y)$

mit beliebigen und differenzierbaren Funktion g und f ,
wobei $f'(x) = c(x)$ gilt.

c) Setze $v(x,y) := u_x(x,y)$, dann erhält man:

$$u_{xy} = 2yu_x \quad \Rightarrow \quad v_y = 2yv \quad \Rightarrow \quad \frac{v_y}{v} = 2y \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int 2ydy$$

$$\Rightarrow \quad \ln|v| = y^2 + k(x) \quad \Rightarrow \quad u_x = v = c(x)e^{y^2}$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = f(x)e^{y^2} + g(y)$$

mit beliebigen und differenzierbaren Funktion g und f ,
wobei $f'(x) = c(x)$ gilt.

Aufgabe 3:

Man berechne mit Hilfe von Exponentialansätzen reelle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen

a) $u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t}$ für $u_t = u_{xx} + u$,

b) $u(r,\varphi) = e^{\alpha \ln r + \beta \varphi}$ für $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0$,

c) $u(t,x,y) = e^{\alpha t + \beta x + \gamma y}$ für $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$.

Lösung:

a) $u(x,t) = e^{\alpha x + \beta t} \quad \Rightarrow \quad u_t = \beta u\,, \quad u_{xx} = \alpha^2 u$

In die Differntialgleichung einsetzen:

$u_t = u_{xx} + u$

$\Rightarrow \quad \beta u = \alpha^2 u + u$

$\overset{u \neq 0}{\Rightarrow} \quad \beta = \alpha^2 + 1$

$\Rightarrow \quad u(x,t) = e^{\alpha x + (\alpha^2+1)t} \quad$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$

b) Aus dem Ansatz $u(r,\varphi) = e^{\alpha \ln r + \beta \varphi}$ erhält man

$$u_r = \frac{\alpha}{r} e^{\alpha \ln r + \beta\varphi} \quad \Rightarrow \quad u_{rr} = -\frac{\alpha}{r^2} e^{\alpha \ln r + \beta\varphi} + \frac{\alpha^2}{r^2} e^{\alpha \ln r + \beta\varphi}.$$

Eingesetzt in $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0$ ergibt

$$0 = (\alpha^2 - \alpha) e^{\alpha \ln r + \beta\varphi} + \alpha e^{\alpha \ln r + \beta\varphi} + \beta^2 e^{\alpha \ln r + \beta\varphi} = (\alpha^2 + \beta^2) e^{\alpha \ln r + \beta\varphi}\,.$$

Mit $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \beta = \pm i\alpha$ und man erhält die komplexen Lösungen

$$e^{\alpha \ln r \pm i\alpha\varphi} = e^{\alpha \ln r} e^{\pm i\alpha\varphi} = r^\alpha (\cos(\alpha\varphi) \pm i \sin(\alpha\varphi))$$

und damit dann die reellen Lösungen

$$r^\alpha \cos(\alpha\varphi) \quad \text{und} \quad r^\alpha \sin(\alpha\varphi)\,.$$

c) $u(t,x,y) = e^{\alpha t + \beta x + \gamma y}$ eingesetzt in $u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}$ ergibt

$$\alpha^2 e^{\alpha t + \beta x + \gamma y} = (\beta^2 + \gamma^2) e^{\alpha t + \beta x + \gamma y} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}.$$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$$e^{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}t + \beta x + \gamma y} \quad \text{und} \quad e^{-\sqrt{\beta^2+\gamma^2}t + \beta x + \gamma y}\,.$$

Aufgabe 4:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$4u_x - 7u_y = y^2 \,, \quad u\,(x,0) = x^2$$

und zeichne die Lösung.

Hinweis: Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\begin{aligned} \xi &= \alpha x + \beta y \\ \eta &= \gamma x + \delta y \end{aligned}$$

mit $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ transformiere man die Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Lösung:

Mit $u(x,y) = w(\xi(x,y), \eta(x,y))$ transformieren sich die partiellen Ableitungen in der Differentialgleichung nach der Kettenregel

$$u_x = w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x \,, \quad u_y = w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y \,,$$

mit $\xi_x = \alpha$, $\eta_x = \gamma$, $\xi_y = \beta$ und $\eta_y = \delta$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 4u_x - 7u_y &= 4(w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x) - 7(w_\xi \xi_y + w_\eta \eta_y) \\ &= w_\xi(4\xi_x - 7\xi_y) + w_\eta(4\eta_x - 7\eta_y) \\ &= w_\xi(4\alpha - 7\beta) + w_\eta(4\gamma - 7\delta) \,. \end{aligned}$$

Durch geschickte Wahl der noch unbestimmten Koeffizienten α, β, γ und δ der linearen Transformation kann man einen Koeffizienten der transformierten Differentialgleichung gleich Null setzten und den anderen eindeutig festlegen unter Berücksichtigung von $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ (reguläre Transformation). Beispielsweise führt die Wahl

$$\alpha = 7,\ \beta = 4,\ \gamma = 0,\ \delta = -1/7 \ \Rightarrow \ \begin{aligned} \xi &= 7x + 4y \\ \eta &= -y/7 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= (\xi + 28\eta)/7 \\ y &= -7\eta \end{aligned}$$

auf die transformierte Differentialgleichung

$$w_\eta(\xi,\eta) = (-7\eta)^2 = 49\eta^2 \,.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Variablen η mit dem Parameter ξ . Integration führt auf die Lösung

$$w(\xi,\eta) = \frac{49}{3}\eta^3 + f(\xi) \quad \Leftrightarrow \quad u(x,y) = -\frac{1}{21}y^3 + f(7x+4y) \,.$$

Die Anfangsvorgabe wird verwendet, um die noch unbestimmte Funktion f festzulegen

$$u(x,0) = f(7x) = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \left(\frac{x}{7}\right)^2 \,.$$

Damit lautet die Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$u(x, y) = -\frac{1}{21}y^3 + \left(\frac{7x + 4y}{7}\right)^2 .$$

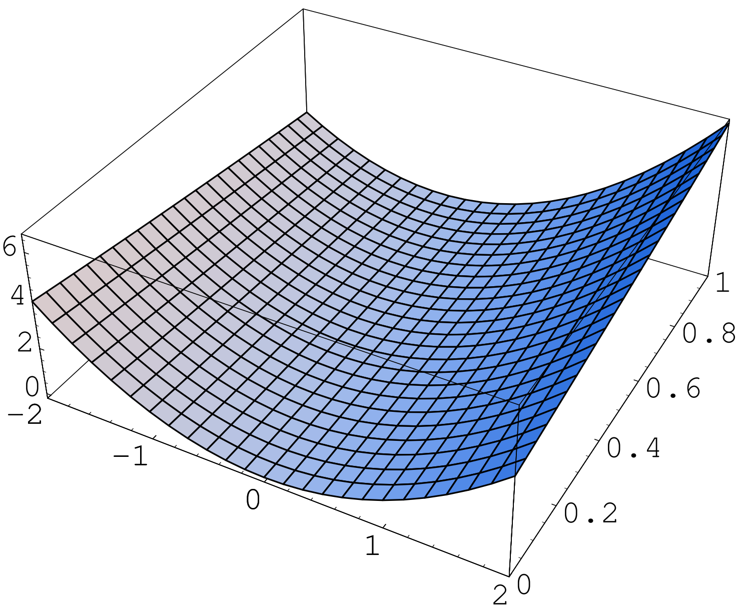

Bild 4: $u(x, y) = -\frac{1}{21}y^3 + \left(\frac{7x + 4y}{7}\right)^2$ für $-2 \leq x \leq 2$ und $0 \leq y \leq 1$

Besprechung: 28.4.+ 29.4.2020