Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
©Dr. K. Rothe

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 7

Für die Durchführung und/oder Korrektur von Übungen zu

Analysis I bzw. Mathematik III im Wintersemester 2020/21

und für den Brückenkurs Mathematik 2020/21

suchen wir noch studentische Tutoren.

Bewerbungen bitte per email an Kai Rothe (rothe@math.uni-hamburg.de) richten mit Namen, Matrikelnummer, Studiengang und bisherigen Klausurergebnissen in Mathematik.

Die **Anfangsrandwertaufgabe** der homogenen Wellengleichung mit homogenen Randbedingungen in einer Raumdimension ($n = 1$) lautet

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx}\,, && (x,t) \in \,]0,\ell[\, \times \mathbb{R}^+\,, \\ u(0,t) &= 0 \;=\; u(\ell,t) && 0 \le t\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, && 0 \le x \le \ell \\ u_t(x,0) &= v_0(x)\,. \end{aligned}$$

Lösungsweg unter Verwendung eines Produktansatzes der Form $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$.

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\lambda\,.$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T'' + \lambda c^2 T = 0 \quad \text{und} \quad X'' + \lambda X = 0\,.$$

Einsetzen in die Randbedingungen ergibt

$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \;\Rightarrow\; X(0) = 0$
$0 = u(\ell,t) = X(\ell)T(t) \;\Rightarrow\; X(\ell) = 0\,.$

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe in X besitzt nur für $\lambda > 0$ nichttriviale Lösungen:

$$X(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x)\,.$$

Einsetzen des Randwertes $X(0) = 0$ ergibt $a = 0$ und $X(\ell) = 0$ liefert die Eigenwerte

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{\ell^2}$$

mit $k \ge 1$ und den zugehörigen Eigenfunktionen

$$X_k(x) = b_k \sin\frac{k\pi x}{\ell}\,.$$

Setzt man λ_k in die Differentialgleichung für T ein, so ergibt sich

$$T'' + \frac{c^2k^2\pi^2}{\ell^2}T = 0$$

und man erhält dort die Lösungen

$$T_k(t) = \tilde{c}_k \cos\left(\frac{ck\pi t}{\ell}\right) + \tilde{d}_k \sin\left(\frac{ck\pi t}{\ell}\right)\,.$$

Die Lösungsdarstellung in $[0,\ell] \times \mathbb{R}^+$ aus dem Produktansatz, die schon die Randbedingungen erfüllt, lautet damit

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(c_k\cos\left(\frac{ck\pi t}{\ell}\right) + d_k\sin\left(\frac{ck\pi t}{\ell}\right)\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)\,.$$

Aufgabe 25:

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} && \text{für} \quad 0 < x < 1\,,\ 0 < t\,, \\ u(0,t) &= 0 \ = \ u(1,t) && \text{für} \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) \ := \ 0 && \\ u_t(x,0) &= v_0(x) \ := \ x^2(x-1) && \text{für} \quad 0 \leq x \leq 1\,. \end{aligned}$$

a) Man berechne die Lösung über den Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$.

b) Man zeichne die Lösung.

Lösung:

a) Der Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\lambda\,.$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T'' + \lambda T = 0 \quad \text{und} \quad X'' + \lambda X = 0\,.$$

Der Produktansatz $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ eingesetzt in die Randbedingungen ergibt

$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \ \Rightarrow \ X(0) = 0$

und

$0 = u(1,t) = X(1)T(t) \ \Rightarrow \ X(1) = 0\,.$

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe für X besitzt somit die Eigenwerte

$$\lambda_k = k^2\pi^2 \quad \text{mit} \quad k \in \mathbb{N}\,,$$

und die zugehörigen Eigenlösungen sind gegeben durch

$$X_k(x) = a_k \sin(k\pi x)\,, \quad a_k \in \mathbb{R}\,.$$

Setzt man λ_k in die Differentialgleichung für T ein, so erhält man dort die Lösungen

$$T_k(t) = \tilde{c}_k \cos(k\pi t) + \tilde{d}_k \sin(k\pi t)\,.$$

Aus dem Produktansatz und Superposition ergibt sich damit die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cos(k\pi t) + d_k \sin(k\pi t)\right) \sin(k\pi x)\,.$$

Mit den noch nicht verwendeten Anfangsbedingungen werden die fehlenden Koeffizienten c_k und d_k bestimmt:

$$u(x,0) = u_0(x) = 0 = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x) \quad \Rightarrow \quad c_k = 0\,,$$

$$u_t(x,0) = v_0(x) = x^2(x-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{d_k k\pi}_{=b_k} \sin(k\pi x)$$

mit

$$\begin{aligned} b_k &= 2\int_0^1 x^2(x-1)\sin(k\pi x)\,dx \\ &= -\frac{2x^2(x-1)\cos(k\pi x)}{k\pi}\bigg|_0^1 + 2\int_0^1 \frac{(3x^2-2x)\cos(k\pi x)}{k\pi}\,dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2(3x^2-2x)\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\bigg|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{(6x-2)\sin(k\pi x)}{(k\pi)^2}\,dx \\ &= \frac{2(6x-2)\cos(k\pi x)}{(k\pi)^3}\bigg|_0^1 - 2\int_0^1 \frac{6\cos(k\pi x)}{(k\pi)^3}\,dx \\ &= \frac{8\cos(k\pi)+4}{(k\pi)^3} = \frac{4(2(-1)^k+1)}{(k\pi)^3}. \end{aligned}$$

Man erhält also $d_k = \dfrac{b_k}{k\pi}$.

b)

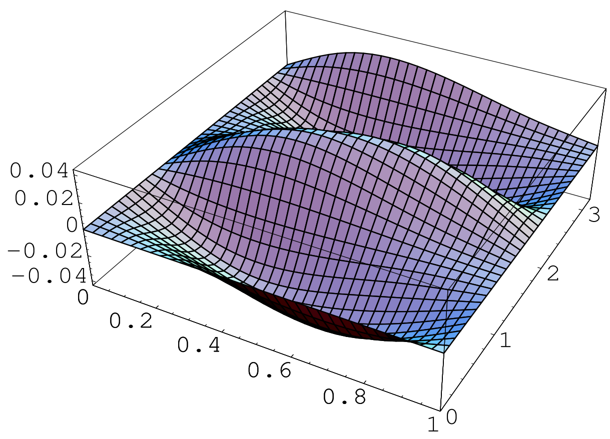

Bild 25 Lösung $u(x,t)$, $0 \le x \le 1$, $0 \le t \le 3.2$

Aufgabe 26:

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}\,, & &\text{für} \quad 0 < x < 2 \quad \text{und} \quad t > 0, \\ u(0,t) &= 0\,, & &\text{für} \quad t \geq 0\,, \\ u(2,t) &= 1\,, & &\text{für} \quad t \geq 0\,, \\ u(x,0) &= x^2/4\,, & &\text{für} \quad 0 \leq x \leq 2\,, \\ u_t(x,0) &= 0\,, & &\text{für} \quad 0 \leq x \leq 2\,. \end{aligned}$$

a) Man bestimme zunächst eine geeignete Funktion $\tilde{u}(x,t)$, die die Randbedingungen erfüllt, und transformiere die Anfangsrandwertaufgabe durch

$$v(x,t) := u(x,t) - \tilde{u}(x,t)$$

in ein Problem mit homogenen Randbedingungen.

b) Anschließend löse man das Problem in v.

Hinweis: Dabei darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

c) Man gebe die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe an.

Lösung:

a) Die Anfangsrandwertaufgabe besitzt die Randbedingungen

$$\varphi_0(t) := u(0,t) = 0\,, \quad \varphi_1(t) := u(2,t) = 1\,.$$

Setze

$$\tilde{u}(x,t) = \varphi_0(t) + \frac{x}{2}\,(\varphi_1(t) - \varphi_0(t)) = \frac{x}{2}$$

und transformiere durch

$$v(x,t) := u(x,t) - \tilde{u}(x,t) = u(x,t) - x/2\,.$$

Die transformierte Anfangsrandwertaufgabe in v besitzt dann homogene Randbedingungen.

$$\begin{aligned} v_{tt} &= v_{xx}\,, & &\text{für} \quad 0 < x < 2 \quad \text{und} \quad t > 0, \\ v(0,t) &= 0\,, & &\text{für} \quad t \geq 0\,, \\ v(2,t) &= 0\,, & & \\ v(x,0) &= x(x-2)/4\,, & &\text{für} \quad 0 \leq x \leq 2\,, \\ v_t(x,0) &= 0\,. & & \end{aligned}$$

b) Die Lösungsdarstellung aus dem Produktansatz mit Superposition, die die Differentialgleichung und die Randbedingungen erfüllt, lautet:

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{k\pi t}{2}\right) + b_k \sin\left(\frac{k\pi t}{2}\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

Aus den Anfangsbedingungen ergeben sich a_k und b_k

$$0 = v_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi b_k}{2} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad b_k = 0$$

$$\frac{x(x-2)}{4} = v(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

als Fourier-Koeffizienten einer ungeraden Fourierreihe mit der Periode $T = 4$ durch

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{4}{4} \int_0^2 \frac{x(x-2)}{4} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \, dx \\ &= -\frac{x(x-2)}{4} \cdot \frac{2}{k\pi} \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \Bigg|_0^2 + \frac{2}{k\pi} \int_0^2 \frac{x-1}{2} \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \, dx \\ &= \frac{2(x-1)}{(k\pi)^2} \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \Bigg|_0^2 - \frac{2}{(k\pi)^2} \int_0^2 \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \, dx \\ &= \frac{4}{(k\pi)^3} \cos\left(\frac{k\pi x}{2}\right) \Bigg|_0^2 = \frac{4((-1)^k - 1)}{(k\pi)^3} \end{aligned}$$

c)

$$u(x,t) = \frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4((-1)^k - 1)}{(k\pi)^3} \cos\left(\frac{k\pi t}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi x}{2}\right)$$

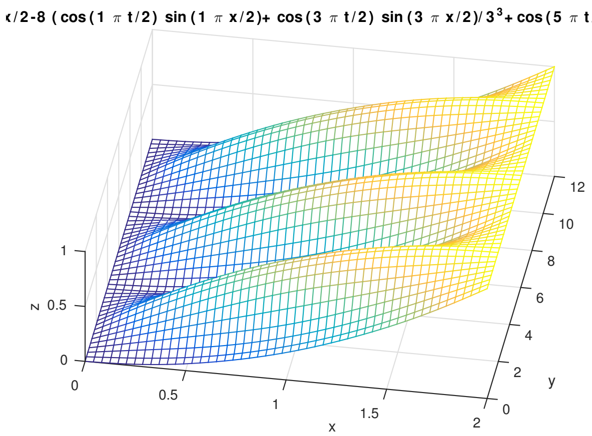

Bild 26 Lösung $u(x,t)\,, \quad 0 \le x \le 2\,, \quad 0 \le t \le 12$

Die **Anfangsrandwertaufgabe** der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung mit inhomogenen Randbedingungen in einer Raumdimension ($n = 1$)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(x,t)\,, \quad 0 < x < a\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) &= \varphi_0(t)\,, \quad t \geq 0\,, \\ u(a,t) &= \varphi_1(t)\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \quad 0 \leq x \leq a \end{aligned}$$

wird in drei Schritten gelöst:

<u>1. Schritt</u>
Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen

$$u(0,t) = \varphi_0(t) \quad \text{und} \quad u(a,t) = \varphi_1(t)$$

wird durch

$$v(x,t) := u(x,t) - \varphi_0(t) - \frac{x}{a}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))$$

in eines mit homogenen Randbedingungen transformiert. Das transformierte Problem in v lautet dann

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + \underbrace{f(x,t) - \varphi_0'(t) - \frac{x}{a}(\varphi_1'(t) - \varphi_0'(t))}_{=\tilde{f}(x,t)} \quad \text{für } 0 < x < a,\ 0 < t\,, \\ v(x,0) &= w_0(x) := u_0(x) - \varphi_0(0) - \frac{x}{a}(\varphi_1(0) - \varphi_0(0)) \quad \text{für } 0 \leq x \leq a \\ v(0,t) &= 0 = v(a,t)\,, \quad \text{für } 0 \leq t\,. \end{aligned}$$

<u>2. Schritt</u>
Man löst das Problem mit homogener Differentialgleichung, Anfangsbedingung und homogenen Randbedingungen (v^* sei die Lösung).

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx}\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < a\,, \quad 0 < t\,, \\ v(x,0) &= w_0(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq a \\ v(0,t) &= 0 = v(a,t)\,, \quad \text{für } 0 \leq t\,. \end{aligned}$$

<u>3. Schritt</u>
Man löst das Problem mit inhomogener Differentialgleichung und homogenen Anfangsrandbedingungen

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + \tilde{f}(x,t)\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < a\,, \quad 0 < t\,, \\ v(x,0) &= 0\,, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \\ v(0,t) &= 0 = v(a,t)\,, \quad \text{für } 0 \leq t \end{aligned}$$

nach der **Fourierschen-Methode**. Dazu wird für die Lösung in Anlehnung an die Lösungsdarstellung von v^* aus Schritt 2 folgender Ansatz gemacht:

$$v^{**}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) .$$

Die homogene Anfangsbedingung führt auf $v_k(0) = 0$.

Die Inhomogenität der Differentialgleichung wird ebenfalls in eine sin-Reihe entwickelt

$$\tilde{f}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) .$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dot{v}_k(t) + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 v_k(t) - f_k(t) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) = 0.$$

Die Koeffizienten $v_k(t)$ der Lösung v^{**} ergeben sich daher aus den folgenden gewöhnlichen Anfangswertaufgaben

$$\dot{v}_k(t) + \left(\frac{k\pi}{a}\right)^2 v_k(t) - f_k(t) = 0 \quad \text{mit} \quad v_k(0) = 0 .$$

Die Lösung des Ausgangsproblems erhält man nun durch

$$u(x,t) \;=\; \varphi_0(t) + \frac{x}{a}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t)) + v^*(x,t) + v^{**}(x,t) .$$

Aufgabe 27:

Berechnen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe der Wärmeleitungsgleichung unter Verwendung der Fourier-Methode

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + (2x-1)e^{-t} + 3\pi^2 \sin 3\pi x \quad \text{für} \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < t\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) := \begin{cases} -4x+1 & , \quad 0 \le x \le 1/2 \\ -1 & , \quad 1/2 \le x \le 1 \end{cases}\,, \\ u(0,t) &= e^{-t}\,,\ u(1,t) = -e^{-t} \qquad \text{für} \quad 0 \le t\,. \end{aligned}$$

Lösung:

Die Lösung des Problems erfolgt in drei Schritten:

1. Schritt

Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen
$u(0,t) = \varphi_0(t) := e^{-t}$ und $u(1,t) = \varphi_1(t) := -e^{-t}$ wird durch

$$v(x,t) := u(x,t) - (\varphi_0(t) + x(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))) = u(x,t) - \left(\underbrace{e^{-t}(1-2x)}_{=u^*(x,t)}\right)$$

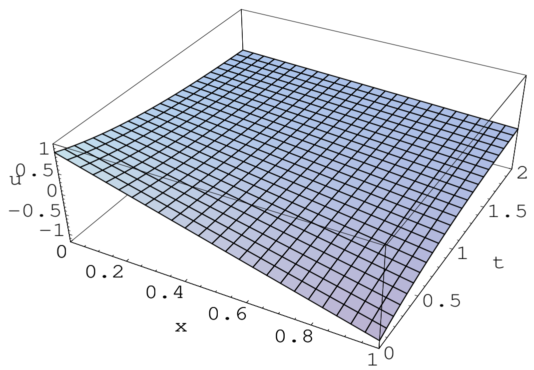

Bild 27 a) $\quad u^*(x,t) = e^{-t}(1-2x)$

in eines mit homogenen Randbedingungen transformiert.

$$u_t = v_t + (2x-1)e^{-t}\,, \quad u_{xx} = v_{xx}\,, \quad u_0(x) = u(x,0) = v(x,0) + 1 - 2x$$

Das transformierte Problem in v lautet dann

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + 3\pi^2 \sin 3\pi x \quad \text{für} \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < t\,, \\ v(x,0) &= v_0(x) := \begin{cases} -2x & , \quad 0 \le x \le 1/2 \\ 2x-2 & , \quad 1/2 \le x \le 1 \end{cases}\,, \\ v(0,t) &= 0\,,\ v(1,t) = 0 \qquad \text{für} \quad 0 \ge t\,. \end{aligned}$$

<u>2. Schritt</u>
Man löst das Problem mit homogener Differentialgleichung und inhomogener Anfangsbedingung

$$\begin{aligned}
v_t &= v_{xx} \quad \text{für} \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < t\,, \\
v(x,0) &= v_0(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} -2x & , & 0 \le x \le 1/2 \\ 2x-2 & , & 1/2 \le x \le 1 \end{array} \right. , \\
v(0,t) &= 0\,,\ v(1,t) = 0 \qquad \text{für} \quad 0 \ge t\,.
\end{aligned}$$

Die Lösung ist gegeben durch: $\quad v^*(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned}
b_k &= 2 \int\limits_0^1 v_0(x) \sin(k\pi x)\, dx \\
&= 2 \left\{ \int\limits_0^{1/2} -2x \sin(k\pi x) dx + \int\limits_{1/2}^{1} (2x-2) \sin(k\pi x) dx \right\} \\
&= -\frac{8}{k^2\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\,.
\end{aligned}$$

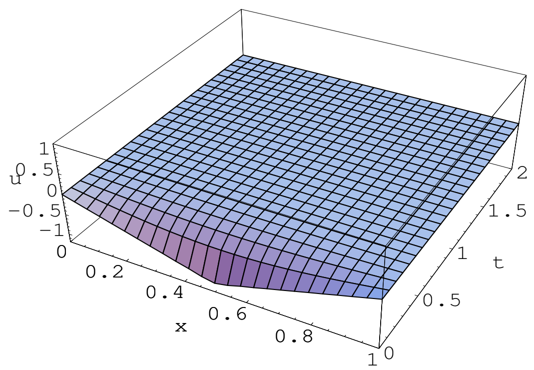

Bild 27 b) $\quad v^*(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} -\frac{8}{k^2\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) e^{-k^2\pi^2 t} \sin(k\pi x)$

<u>3. Schritt</u>
Man löst das Problem mit inhomogener Differentialgleichung und homogener Anfangsbedingung

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + 3\pi^2 \sin 3\pi x\,, && \text{für} \quad 0 < x < 1\,, \quad 0 < t\,, \\ v(x,0) &= 0\,, && \text{für} \quad 0 \le x \le 1 \\ v(0,t) &= 0 \ = v(1,t)\,, && \text{für} \quad 0 \ge t\,. \end{aligned}$$

Für die Lösung wird nach der Fourier-Methode folgender Ansatz gemacht:

$$v^{**}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \sin(k\pi x)\,.$$

Die homogene Anfangsbedingung wird nach einem Koeffizientenvergleich durch die Forderung $a_k(0) = 0$ erfüllt.

Die rechte Seite wird ebenfalls in eine sin-Reihe entwickelt

$$3\pi^2 \sin 3\pi x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \sin(k\pi x)\,.$$

Hier ergibt ein Koeffizientenvergleich $c_3(t) = 3\pi^2$ und $c_k(t) \equiv 0$ sonst.

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(\dot a_k(t) + k^2\pi^2 a_k(t) - c_k(t)\big) \sin(k\pi x) = 0.$$

Die Koeffizienten $a_k(t)$ der Lösung v^{**} sind daher aus den folgenden gewöhnlichen Anfangswertaufgaben zu berechnen

$$\dot a_k(t) + k^2\pi^2 a_k(t) = c_k(t) \quad \text{mit} \quad a_k(0) = 0.$$

Für $k = 3$ liegt eine lineare inhomogene Differentialgleichung vor

$$\dot a_3(t) + 9\pi^2 a_3(t) = 3\pi^2 \quad \text{mit} \quad a_3(0) = 0$$

mit der allgemeinen Lösung

$$a_3(t) = 1/3 + d_3 e^{-9\pi^2 t}\,.$$

Berücksichtigt man die Anfangsvorgabe, so ergibt sich

$$a_3(t) = \frac{1}{3}\left(1 - e^{-9\pi^2 t}\right)\,.$$

Für $k \neq 3$ lautet die allgemeine Lösung der linearen homogenen Differentialgleichung

$$a_k(t) = d_k e^{-k^2\pi^2 t}\,.$$

Mit den Anfangsbedingungen $a_k(0) = 0$ folgt $d_k = 0$ und damit $a_k(t) = 0$.

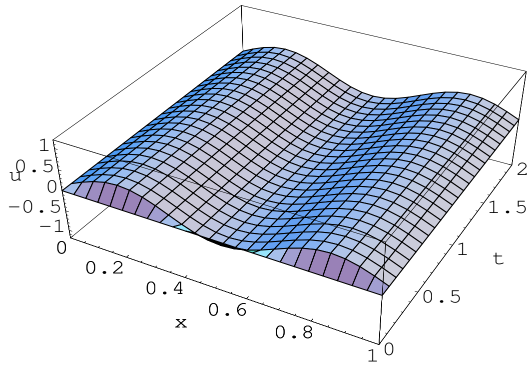

Bild 27 c) $v^{**}(x,t) = \dfrac{1}{3}\left(1 - e^{-9\pi^2 t}\right)\sin(3\pi x)$

Die Lösung des Ausgangsproblems erhält man nun durch

$$u(x,t) = u^*(x,t) + v^*(x,t) + v^{**}(x,t)\;.$$

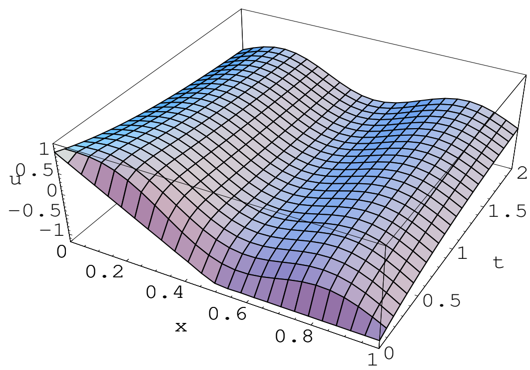

Bild 27 d) $u(x,t) = u^*(x,t) + v^*(x,t) + v^{**}(x,t)$

Die **Anfangsrandwertaufgabe** der inhomogenen Wellengleichung mit inhomogenen Randbedingungen in einer Raumdimension ($n = 1$)

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + f(x,t)\,, \quad 0 < x < a\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0,t) &= \varphi_0(t)\,, \quad t \geq 0\,, \\ u(a,t) &= \varphi_1(t)\,, \\ u(x,0) &= u_0(x)\,, \quad 0 \leq x \leq a\,, \\ u_t(x,0) &= u_1(x) \end{aligned}$$

wird in drei Schritten gelöst:

1. Schritt

Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen

$$u(0,t) = \varphi_0(t) \quad \text{und} \quad u(a,t) = \varphi_1(t)$$

wird durch

$$v(x,t) := u(x,t) - \varphi_0(t) - \frac{x}{a}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))$$

in eines mit homogenen Randbedingungen transformiert. Das transformierte Problem in v lautet dann

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 v_{xx} + \underbrace{f(x,t) - \varphi_0''(t) - \frac{x}{a}(\varphi_1''(t) - \varphi_0''(t))}_{=\tilde{f}(x,t)} \quad \text{für } 0 < x < a,\ 0 < t\,, \\ v(x,0) &= w_0(x) := u_0(x) - \varphi_0(0) - \frac{x}{a}(\varphi_1(0) - \varphi_0(0)) \quad \text{für } 0 \leq x \leq a \\ v_t(x,0) &= w_1(x) := u_1(x) - \varphi_0'(0) - \frac{x}{a}(\varphi_1'(0) - \varphi_0'(0)) \\ v(0,t) &= 0 = v(a,t)\,, \quad \text{für } 0 \leq t\,. \end{aligned}$$

2. Schritt

Man löst das Problem mit homogener Differentialgleichung, Anfangsbedingungen und homogenen Randbedingungen (v^* sei die Lösung).

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 v_{xx}\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < a\,, \quad 0 < t\,, \\ v(x,0) &= w_0(x) \quad \text{für } 0 \leq x \leq a \\ v_t(x,0) &= w_1(x) \\ v(0,t) &= 0 = v(a,t)\,, \quad \text{für } 0 \leq t\,. \end{aligned}$$

3. Schritt
Man löst das Problem mit inhomogener Differentialgleichung und homogenen Anfangsrandbedingungen

$$
\begin{aligned}
v_{tt} &= c^2 v_{xx} + \tilde{f}(x,t)\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < a\,, \quad 0 < t\,, \\
v(x,0) &= 0 = v_t(x,0)\,, \quad \text{für} \quad 0 \le x \le a \\
v(0,t) &= 0 = v(a,t)\,, \quad \text{für}\, 0 \le t
\end{aligned}
$$

nach der **Fourierschen-Methode**. Dazu wird für die Lösung in Anlehnung an die Lösungsdarstellung von v^* aus Schritt 2 folgender Ansatz gemacht:

$$v^{**}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) .$$

Die homogenen Anfangsbedingungen führen auf $v_k(0) = 0$
und $\dot{v}_k(0) = 0$.

Die Inhomogenität der Differentialgleichung wird ebenfalls in eine sin-Reihe entwickelt

$$\tilde{f}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) .$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\ddot{v}_k(t) + \left(\frac{ck\pi}{a}\right)^2 v_k(t) - f_k(t) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right) = 0.$$

Die Koeffizienten $v_k(t)$ der Lösung v^{**} ergeben sich daher aus den folgenden gewöhnlichen Anfangswertaufgaben

$$\ddot{v}_k(t) + \left(\frac{ck\pi}{a}\right)^2 v_k(t) - f_k(t) = 0 \quad \text{mit} \quad v_k(0) = 0 = \dot{v}_k(0) .$$

Die Lösung des Ausgangsproblems erhält man nun durch

$$u(x,t) \;=\; \varphi_0(t) + \frac{x}{a}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t)) + v^*(x,t) + v^{**}(x,t) .$$

Aufgabe 28:

Man löse die Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung unter Verwendung der Fourier-Methode:

$$\begin{aligned} u_{tt} &= c^2 u_{xx} + t\sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + \frac{x-\ell}{\ell}\sin t - \frac{x}{\ell}\cos t,\ 0 < x < \ell,\ 0 < t, \\ u(0,t) &= \sin t\,, \quad u(\ell,t) = \cos t\,, \quad \text{für} \quad t \geq 0, \\ u(x,0) &= \frac{x}{\ell}, \quad u_t(x,0) = 1 - \frac{x}{\ell}\,, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \ell \end{aligned}$$

und zeichne die Lösung für $\ell = 1$ und $c = 1$.

Lösung:

Die Lösung des Problems erfolgt in drei Schritten:

1. Schritt

Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen

$$u(0,t) = \varphi_0(t) := \sin t \quad \text{und} \quad u(\ell,t) = \varphi_1(t) := \cos t$$

wird durch $\quad v(x,t) := u(x,t) - \varphi_0(t) - \frac{x}{\ell}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))$

$$\Rightarrow \quad u(x,t) = v(x,t) - \frac{x-\ell}{\ell}\sin t + \frac{x}{\ell}\cos t$$

in eines mit homogenen Randbedingungen transformiert. Das transformierte Problem in v lautet dann

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 v_{xx} + t\sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)\,,\ 0 < x < \ell,\ 0 < t\,, \\ v(x,0) &= u(x,0) - \varphi_0(0) - \frac{x}{\ell}(\varphi_1(0) - \varphi_0(0)) \;=\; \frac{x}{\ell} - \frac{x}{\ell} \;=\; 0\,,\ 0 \leq x \leq \ell \\ v_t(x,0) &= u_t(x,0) - \varphi_0'(0) - \frac{x}{\ell}(\varphi_1'(0) - \varphi_0'(0)) \;=\; 1 - \frac{x}{\ell} - 1 + \frac{x}{\ell} \;=\; 0 \\ v(0,t) &= 0 \;=\; v(\ell,t)\,, \quad \text{für } 0 \leq t\,. \end{aligned}$$

2. Schritt

Man löst das Problem mit homogener Differentialgleichung und Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 v_{xx}\,, \quad \text{für} \quad 0 < x < \ell\,, \quad 0 < t\,, \\ v(x,0) &= 0 \;=\; v_t(x,0)\,, \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq \ell \\ v(0,t) &= 0 \;=\; v(\ell,t)\,, \quad \text{für } 0 \leq t\,. \end{aligned}$$

Das Problem wird gelöst durch $v^* \equiv 0$. Rein rechnerisch ergibt sich die Lösung aus der über einen Produktansatz gewonnenen Lösungsdarstellung, die schon die Randbedingungen erfüllt:

$$v^*(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\left(\frac{ck\pi t}{\ell}\right) + B_k \sin\left(\frac{ck\pi t}{\ell}\right) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right)$$

unter Ausnutzung der Anfangsbedingungen mit anschließendem Koeffizientenvergleich.

<u>3. Schritt</u>
Man löst das Problem mit inhomogener Differentialgleichung und homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} v_{tt} &= c^2 v_{xx} + t\sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right), \quad \text{für} \quad 0 < x < \ell, \quad 0 < t, \\ v(x,0) &= 0 = v_t(x,0), \quad \text{für} \quad 0 \le x \le \ell \\ v(0,t) &= 0 = v(\ell,t), \quad \text{für } 0 \le t. \end{aligned}$$

Nach der Fourierschen Methode wird für die Lösung in Anlehnung an den 2.Schritt folgender Ansatz gemacht:

$$v^{**}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right).$$

Die homogenen Anfangsbedingungen führen auf $v_k(0) = 0$, $\dot{v}_k(0) = 0$.

Die Inhomogenität der Differentialgleichung wird ebenfalls in eine sin-Reihe entwickelt

$$t\sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) \quad \Rightarrow \quad f_2(t) = t, \; f_k(t) = 0 \text{ sonst}.$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\ddot{v}_k(t) + \left(\frac{ck\pi}{\ell}\right)^2 v_k(t) - f_k(t) \right) \sin\left(\frac{k\pi x}{\ell}\right) = 0.$$

Die Koeffizienten $v_k(t)$ der Lösung v^{**} ergeben sich daher aus den folgenden gewöhnlichen Anfangswertaufgaben

$$\ddot{v}_k(t) + \left(\frac{ck\pi}{\ell}\right)^2 v_k(t) - f_k(t) = 0 \quad \text{mit} \quad v_k(0) = 0 = \dot{v}_k(0).$$

Für $k \neq 2$ ist $v_k \equiv 0$.

Für $k = 2$ erhält man die allgemeine Lösung

$$v_2(t) = A_2 \cos\left(\frac{2c\pi t}{\ell}\right) + B_2 \sin\left(\frac{2c\pi t}{\ell}\right) + \frac{\ell^2 t}{4c^2\pi^2}.$$

Berücksichtigt man die Anfangsvorgaben, so ergibt sich

$$v_2(t) = \frac{\ell^2}{4c^2\pi^2}\left(t - \frac{\ell}{2c\pi}\sin\left(\frac{2c\pi t}{\ell}\right)\right) .$$

Die Lösung des Ausgangsproblems erhält man nun durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi_0(t) + \frac{x}{\ell}(\varphi_1(t) - \varphi_0(t)) + v^*(x,t) + v^{**}(x,t) \\ &= \frac{x}{\ell}\cos t - \frac{x-\ell}{\ell}\sin t + \frac{\ell^2}{4c^2\pi^2}\left(t - \frac{\ell}{2c\pi}\sin\left(\frac{2c\pi t}{\ell}\right)\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) . \end{aligned}$$

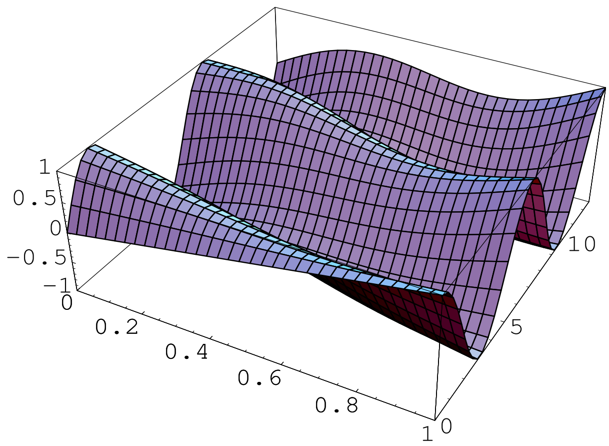

Bild 28 Lösung $u(x,t)$ für $\ell = 1$ und $c = 1$