Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 5

Die Laplace Gleichung in Polarkoordinaten:

Die Transformation von $\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$ in Polarkoordinaten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 < r\ ,\ 0 \le \varphi < 2\pi$$

mit

$$\tilde{u}(r,\varphi) := u(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) \Leftrightarrow \tilde{u}(r(x,y), \varphi(x,y)) = u(x,y)$$

erfolgt nach der Kettenregel. Für die Jacobimatrix der Koordinatentransformation erhält man:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} r_x & r_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\dfrac{\sin\varphi}{r} & \dfrac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{x}{r} & \dfrac{y}{r} \\ -\dfrac{y}{r^2} & \dfrac{x}{r^2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Für die zweiten Ableitungen ergibt sich daraus

$$r_{xx} = \frac{y^2}{r^3}\,, \quad r_{yy} = \frac{x^2}{r^3}\,, \quad \varphi_{xx} = \frac{2xy}{r^4}\,, \quad \varphi_{yy} = -\frac{2xy}{r^4}\,.$$

$$\begin{aligned}
u_x &= \tilde{u}_r r_x + \tilde{u}_\varphi \varphi_x\,, \quad u_y = \tilde{u}_r r_y + \tilde{u}_\varphi \varphi_y \\
u_{xx} &= \tilde{u}_{rr}(r_x)^2 + 2r_x\varphi_x\tilde{u}_{r\varphi} + \tilde{u}_{\varphi\varphi}(\varphi_x)^2 + \tilde{u}_r r_{xx} + \tilde{u}_\varphi \varphi_{xx}\,, \\
u_{yy} &= \tilde{u}_{rr}(r_y)^2 + 2r_y\varphi_y\tilde{u}_{r\varphi} + \tilde{u}_{\varphi\varphi}(\varphi_y)^2 + \tilde{u}_r r_{yy} + \tilde{u}_\varphi \varphi_{yy}\,.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = \tilde{u}_{rr} + \frac{\tilde{u}_r}{r} + \frac{\tilde{u}_{\varphi\varphi}}{r^2} \, .$$

Zum Produktansatz in Polarkoordinaten:

Die Laplace-Gleichung in kartesischen Koordinaten $u_{xx} + u_{yy} = 0$ besitzt in Polarkoordinaten $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ folgende Darstellung:

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} = 0 \quad \overset{r>0}{\Leftrightarrow} \quad r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0$$

auf dem zugrunde liegenden Gebiet G. Zusätzlich soll noch die Randbedingung $u|_{\partial G} = u_0$ gelten.

Setzt man einen Produktansatzes der Form $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ in die Laplace-Gleichung ein, so erhält man

$$r^2 R''\Phi + rR'\Phi + R\Phi'' = 0 \, .$$

Nach Trennung der Variablen erhält man

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \lambda$$

und damit die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \quad , \quad r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \, .$$

Die gewöhnliche Differentialgleichung $\Phi'' + \lambda\Phi = 0$ besitzt mit $a, b \in \mathbb{R}$ die allgemeine reelle Lösung

$$\Phi(\varphi) = \begin{cases} a\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + b\sin(\sqrt{\lambda}\varphi) & \lambda > 0 \\ a + b\varphi & \lambda = 0 \\ a\cosh(\sqrt{-\lambda}\varphi) + b\sinh(\sqrt{-\lambda}\varphi) & \lambda < 0 \, . \end{cases}$$

a) Für **Kreis-** oder **Kreisringgebiete** kann $\Phi(\varphi)$ nur 2π-periodische Lösungen $u \not\equiv 0$ besitzen mit den Eigenwerten $\lambda_k = k^2$ mit $k \in \mathbb{N}_0$. Alle Lösungen lauten dann

$$\Phi_0(\varphi) = a_0 \, , \quad \Phi_k(\varphi) = a_k\cos(k\varphi) + b_k\sin(k\varphi) \, , \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \, .$$

b) Für **Kreissektor-** oder **Kreisringsektorgebiete** mit den Randbedingungen

$$u(r, 0) = 0 = u(r, \alpha) \quad \Rightarrow \quad \Phi(0) = 0 = \Phi(\alpha)$$

ergibt der Produktansatz nur für $\lambda > 0$ Lösungen $u \not\equiv 0$:

$$0 = \Phi(0) = a\cos(0) + b\sin(0) = a \, ,$$

$$0 = \Phi(\alpha) = b\sin(\sqrt{\lambda}\alpha) \overset{b\neq 0}{\Rightarrow} \sqrt{\lambda}\alpha = k\pi \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{\alpha^2} \, , \; k \in \mathbb{N} \, .$$

Alle Lösungen lauten dann

$$\Phi_k(\varphi) = b_k \sin\left(\frac{k\pi\varphi}{\alpha}\right) \, , \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \, .$$

Bei der Lösung der Differentialgleichung $r^2R'' + rR' - \lambda_k R = 0$ unterscheidet man

1.Fall: $\lambda_0 = 0$:

$$0 = r^2R'' + rR' \quad \Rightarrow \quad R'(r) = \frac{c_0}{r} \quad \Rightarrow \quad R_0(r) = c_0 \ln r + d_0$$

2.Fall: $\lambda_k > 0$:

Der Ansatz $R(r) = r^\alpha$ eingesetzt in $r^2R'' + rR' - \lambda_k R = 0$ liefert

$$r^\alpha(\alpha(\alpha-1) + \alpha - \lambda_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \lambda_k \quad \Rightarrow \quad R_k(r) = c_k r^{\sqrt{\lambda_k}} + d_k r^{-\sqrt{\lambda_k}} \, .$$

Damit ergeben sich aus dem Produktansatz die partikulären Lösungen

$$u_k(r,\varphi) = R_k(r) \cdot \Phi_k(\varphi) \, .$$

Da die Differentialgleichung linear ist, erhält man durch Superposition die Lösung

$$u(r,\varphi) = \sum_k R_k(r) \cdot \Phi_k(\varphi) \, .$$

Entfernt man in der Lösungsdarstellung von u die Teile mit Definitionslücken erhält man die Lösungen im zugrunde liegenden Gebiet G.

Mit den ungenutzten Randbedingungen werden dann die Koeffizienten $A_k, ..., D_k$ aus den Fourier-Reihen der Randfunktion u_0 berechnet:

a) **Kreisring**: $G = \{(r,\varphi) \mid R_1 \le r \le R_2 \, , \; 0 \le \varphi < 2\pi\}$

$$u(r,\varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + C_k r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k + D_k r^{-k}) \sin(k\varphi) \, ,$$

ungenutzte Randbedingungen: $u(R_1,\varphi) = u_1(\varphi) \, , \; u(R_2,\varphi) = u_2(\varphi)$,

b) **Kreis** $G = \{(r,\varphi) \mid 0 \le r \le R \, , \; 0 \le \varphi < 2\pi\}$

$$u(r,\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} r^k \left(A_k \cos(k\varphi) + B_k \sin(k\varphi)\right) \, ,$$

ungenutzte Randbedingung: $u(R,\varphi) = u_2(\varphi)$,

c) **Kreisringsektor** $G = \{(r,\varphi) \mid R_1 \le r \le R_2 \, , \; 0 \le \varphi \le \alpha < 2\pi\}$

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} (B_k r^{k\pi/\alpha} + D_k r^{-k\pi/\alpha}) \sin\left(\frac{k\pi\varphi}{\alpha}\right) \, ,$$

ungenutzte Randbedingungen: $u(R_1,\varphi) = u_1(\varphi) \, , \; u(R_2,\varphi) = u_2(\varphi)$,

d) **Kreissektor** $G = \{(r,\varphi) \mid 0 \le r \le R \, , \; 0 \le \varphi \le \alpha < 2\pi\}$

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k r^{k\pi/\alpha} \sin\left(\frac{k\pi\varphi}{\alpha}\right) \, ,$$

ungenutzte Randbedingung: $u(R,\varphi) = u_2(\varphi)$.

Aufgabe 17:

Man berechne die Lösung des folgenden Dirichlet-Problems im Halbkreis

$$\begin{aligned} r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \quad &\text{für} \quad 0 < r < 6 \quad \text{und} \quad 0 < \varphi < \pi \,, \\ u(r,0) = 0 \quad \text{und} \quad u(r,\pi) = 0 \quad &\text{für} \quad 0 \le r \le 6 \,, \\ u(6,\varphi) = \left|\varphi - \frac{\pi}{2}\right| - \frac{\pi}{2} \quad &\text{für} \quad 0 \le \varphi \le \pi, \end{aligned}$$

bestimme den maximalen und minimalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Lösung:

Der Produktansatz $u(r,\varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 R''\Phi + rR'\Phi + R\Phi'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \lambda$$

Der Produktansatz $u(r,\varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ eingesetzt in die Randbedingungen

$$0 = u(r,0) = R(r)\Phi(0) \,, \quad 0 = u(r,\pi) = R(r)\Phi(\pi)$$

ergibt nur nichttriviale Lösungen u (R darf nicht die Nullfunktion sein) für

$$\Phi(0) = 0 = \Phi(\pi) \ .$$

Damit erhält man für Φ nur für $\lambda > 0$ nichttriviale Lösungen:

$$\Phi(\varphi) = a \sin(\sqrt{\lambda}\varphi) + b \cos(\sqrt{\lambda}\varphi) \,.$$

Insbesondere ergibt sich aus den Randbedingungen

$0 = \Phi(0) = a \sin(\sqrt{\lambda} \cdot 0) + b \cos(\sqrt{\lambda} \cdot 0) = b$,

$0 = \Phi(\pi) = a \sin\left(\sqrt{\lambda} \cdot \pi\right)$.

Wegen $a \neq 0$, sonst wäre Φ die Nullfunktion, muss gelten

$$\sqrt{\lambda} \cdot \pi = k\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = k \Rightarrow \lambda_k = k^2 \Rightarrow \Phi_k(\varphi) = a_k \sin(k\varphi) \,,\ k = 1, 2, \ldots$$

Setzt man $\lambda_k = k^2$ in die Differentialgleichung für $R(r)$ ein, so erhält man dort die Lösungen

$$R_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k} \,.$$

Hier muss noch $d_k = 0$ gesetzt werden, da die Lösung sonst im Nullpunkt, der hier zum Definitionsbereich gehört, eine Singularität besäße.

Durch Superposition ergibt sich aus dem Produktansatz damit die Lösungsdarstellung

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^k \sin(k\varphi)\,.$$

Die noch nicht verwendeten Randbedingung ergibt

$$u(6,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k 6^k \sin(k\varphi) = \left|\varphi - \frac{\pi}{2}\right| - \frac{\pi}{2}\,.$$

Die Randfunktion muss also in eine 2π-perodische ungerade sin-Reihe entwickelt werden. Man berechnet A_k aus den Fourier-Koeffizienten

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\left|\varphi - \frac{\pi}{2}\right| - \frac{\pi}{2}\right)\sin(k\varphi)\,d\varphi \\ &= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} -\varphi\sin(k\varphi)\,d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} (\varphi-\pi)\sin(k\varphi)\,d\varphi\right) \\ &= -\frac{4}{\pi k^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

durch $A_k 6^k = c_k \;\Rightarrow\; A_k = c_k 6^{-k}$. Die Lösung des Ausgangsproblems lautet mit den obigen Fourkoeffizienten also:

$$u(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(\frac{r}{6}\right)^k \sin(k\varphi)\,.$$

Da u harmonisch und nicht konstant ist, werden Maximum und Minimum nur auf dem Rand angenommen, können also aus den Randbedingungen abgelesen werden.

Der Maximalwert ist damit gleich 0.

Der Minimalwert wird im Punkt $(r,\varphi) = \left(6, \frac{\pi}{2}\right)$ angenommen

$$u_{\min} = u\left(6,\frac{\pi}{2}\right) = \left|\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right| - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}\,.$$

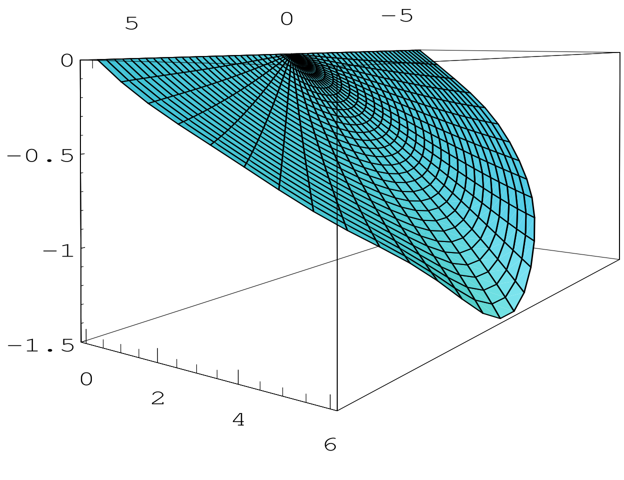

Bild 17 Lösung $u(r,\varphi)$

Die Wärmeleitungsgleichung

Für die Lösung der **Anfangsrandwertaufgabe** der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta_{\boldsymbol{x}} u \quad \text{für} \quad (\boldsymbol{x}, t) \in U_T := U \times (0, T]\,, \\ u &= g \qquad \text{auf} \qquad \Gamma_T := \overline{U_T} \backslash U_T \end{aligned}$$

mit beschränkter und offener Menge $U \in \mathbb{R}^n$ gilt das **Maximumprinzip**

$$\max_{(\boldsymbol{x},t)\in\overline{U_T}} u(\boldsymbol{x}, t) = \max_{(\boldsymbol{x},t)\in\Gamma_T} u(\boldsymbol{x}, t)\,.$$

Bei der Lösung der **Anfangsrandwertaufgabe** der Wärmeleitungsgleichung in einer Raumdimension ($n = 1$) mit homogener Differentialgleichung und homogenen Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && \text{für} \quad 0 < x < a\,, \quad 0 < t\,, \\ u(0, t) &= 0 && \text{für} \quad 0 \le t \\ u(a, t) &= 0 && \\ u(x, 0) &= u_0(x) && \text{für} \quad 0 \le x \le a\,. \end{aligned}$$

führt der Produktansatz $u(x, t) = X(x)T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung auf

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\lambda = (\text{konst})\,.$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T' + \lambda T = 0 \quad \text{und} \quad X'' + \lambda X = 0.$$

Die Randbedingungen eingesetzt in den Produktansatz

$$0 = u(0, t) = X(0)T(t) \quad \text{und} \quad 0 = u(a, t) = X(a)T(t)$$

ergeben $X(0) = 0 = X(a)$.

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe in X besitzt daher nur für $\lambda > 0$ nichttriviale reellwertige Lösungen der Form:

$$X(x) = c\cos(\sqrt{\lambda}x) + d\sin(\sqrt{\lambda}x)\,.$$

Einsetzen der Randwerte $X(0) = 0 = X(a)$ ergibt die Eigenwerte λ.

Aufgabe 18:

Man berechne die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe für folgende Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{array}{rcll} u_t & = & u_{xx} & \text{für} \quad 0 < x < 4\,, \\ & & & \phantom{\text{für} \quad} 0 < t \leq T\,, \\ u(0,t) & = & 0 & \text{für} \quad 0 \leq t \leq T \\ u(4,t) & = & 0 & \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{für} \quad 0 \leq x \leq 4 \end{array}$$

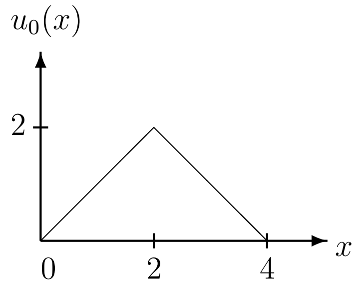

Bild 18 Anfangsfunktion u_0

und bestimme den Maximalwert der Lösung u im Gebiet $[0,4] \times [0,T]$.

Lösung:

Der Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: -\lambda \; = (\text{konst})\,.$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T' + \lambda T = 0 \quad \text{und} \quad X'' + \lambda X = 0.$$

Die Randbedingungen

$$0 = u(0,t) = X(0)T(t) \quad \text{und} \quad 0 = u(4,t) = X(4)T(t)$$

liefern $X(0) = 0 = X(4)$.

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe in X besitzt nur für $\lambda > 0$ nichttriviale Lösungen:

$$X(x) = a\cos(\sqrt{\lambda}x) + b\sin(\sqrt{\lambda}x)\,.$$

Einsetzen des Randwertes $X(0) = 0$ ergibt $a = 0$ und $X(4) = 0$ liefert die Eigenwerte

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{16}$$

mit $k \geq 1$ und zugehörigen Eigenfunktionen

$$X_k(x) = b_k \sin\frac{k\pi x}{4}\,.$$

Setzt man λ_k in die Differentialgleichung für T ein, so erhält man dort die Lösungen

$$T_k(t) = \exp\left(-\frac{k^2\pi^2 t}{16}\right)\,.$$

Aus dem Produktansatz und Superposition ergibt sich damit die Lösung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{4} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2 t}{16}\right) .$$

Mit der noch nicht verwendeten Anfangsbedingung werden die fehlenden Koeffizienten b_k berechnet. Aus dem Bild in der Aufgabenstellung ergibt sich die Anfangsvorgabe

$$u_0(x) = \begin{cases} x & \text{für} \quad 0 \le x \le 2\,, \\ 4-x & \text{für} \quad 2 \le x \le 4\,. \end{cases}$$

Berechnung der Fourier-Koeffizienten mit $T = 8$ und $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{2}\int_0^4 u_0(x)\sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^2 x\sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right)\,dx + \frac{1}{2}\int_2^4 (4-x)\sin\left(\frac{k\pi x}{4}\right)\,dx \\
&= -\frac{2x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{4}\bigg|_0^2 + \frac{2}{k\pi}\int_0^2 \cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right)\,dx \\
&\quad -\frac{2(4-x)}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{4}\bigg|_2^4 - \frac{2}{k\pi}\int_2^4 \cos\left(\frac{k\pi x}{4}\right)\,dx \\
&= \frac{8}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{4}\bigg|_0^2 - \frac{8}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi x}{4}\bigg|_2^4 = \frac{16}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}
\end{aligned}$$

Mathematica-Plotbefehl (ohne u_0)

```
Plot[{Sum[16 Sin[k*Pi/2]/(k^2 Pi^2) Sin[k*Pi*x/4], {k, 1, 1}],
  Sum[16 Sin[k*Pi/2]/(k^2 Pi^2) Sin[k*Pi*x/4], {k, 1, 3}],
  Sum[16 Sin[k*Pi/2]/(k^2 Pi^2) Sin[k*Pi*x/4], {k, 1, 5}],
  Sum[16 Sin[k*Pi/2]/(k^2 Pi^2) Sin[k*Pi*x/4], {k, 1, 7}],
  Sum[16 Sin[k*Pi/2]/(k^2 Pi^2) Sin[k*Pi*x/4], {k, 1, 9}]},
  {x, 0, 4},AxesLabel -> {"x", "u(x,0)"}, PlotRange -> {0, 2.2}]
```

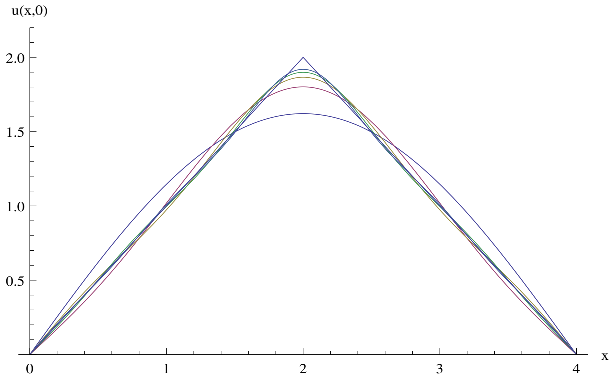

Bild 18 a) u_0 und Näherungslösungen $u_N(x,0) = \sum_{k=1}^{N} b_k \sin\frac{k\pi x}{4}$, $N = 1, 3, 5, 7, 9$

MATLAB-Plotbefehl

```
ezmesh('x','t','16*(sin(pi*x/4)*exp(-pi^2*t/16)
-sin(3*pi*x/4)*exp(-9*pi^2*t/16)/9
+sin(5*pi*x/4)*exp(-25*pi^2*t/16)/25
-sin(7*pi*x/4)*exp(-49*pi^2*t/16)/49
+sin(9*pi*x/4)*exp(-81*pi^2*t/16)/81)/pi^2',[0,1,0,4],50)
```

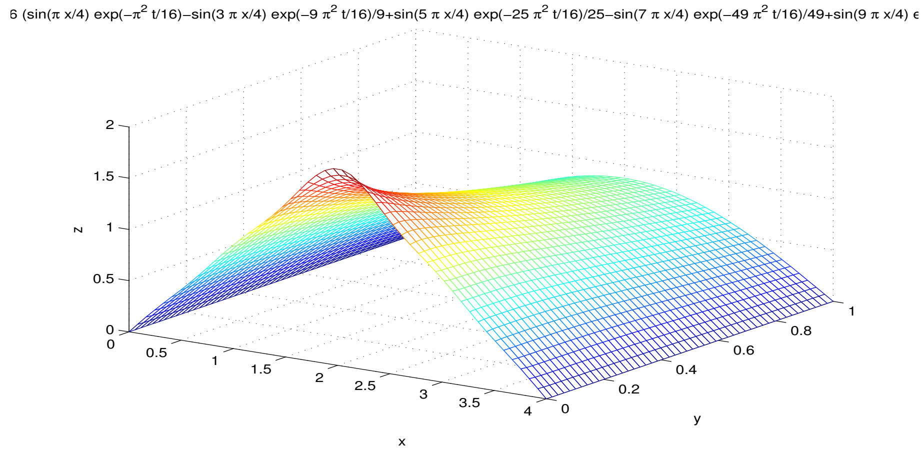

Bild 18 b) Näherungslösung $u_9(x,t) = \sum_{k=1}^{9} b_k \sin\frac{k\pi x}{4} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{16}t\right)$

Nach dem Maximumprinzip gilt $\max\limits_{(x,t)\in[0,4]\times[0,T]} u(x,t) = \max\limits_{x\in[0,4]} u_0(x) = 2.$

Aufgabe 19:

Gegeben sei folgende Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= 4u_{xx} && \text{für} \quad 0 < x < 6\,, \quad 0 < t \\ u(0,t) &= 3 && \text{für} \quad 0 \le t \\ u(6,t) &= 3 && \\ u(x,0) &= u_0(x) && \text{für} \quad 0 \le x \le 6\,. \end{aligned}$$

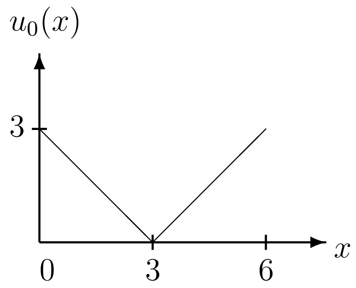

Bild 19 Anfangsfunktion u_0

a) Man gebe $u_0(x)$ an.

b) Man transformiere das gegebene Problem in u zuerst in ein Problem in v mit homogenen Randbedingungen.

c) Man löse das transformierte Problem in v.

   Hinweis: Es darf die sich aus dem Produktansatz ergebende Lösungsdarstellung verwendet werden.

d) Man gebe die Lösung u an.

e) Man bestimme den maximalen Funktionswert von u im zu Grunde liegenden Gebiet $G := [0,6] \times [0,\infty[$.

Lösung:

a) Aus dem Bild in der Aufgabenstellung ergibt sich die Anfangsvorgabe

$$u_0(x) = \begin{cases} 3-x & \text{für} \quad 0 \le x \le 3\,, \\ x-3 & \text{für} \quad 3 < x \le 6\,. \end{cases}$$

b) Das Problem mit den inhomogenen Randbedingungen $u(0,t) = \varphi_0(t) = 3$ und $u(6,t) = \varphi_1(t) = 3$ wird durch

$$v(x,t) := u(x,t) - \Big(\varphi_0(t) + \frac{x}{6}\,(\varphi_1(t) - \varphi_0(t))\Big) = u(x,t) - 3\,.$$

in eines mit homogenen Randbedingungen transformiert.

Da sich die Differentialgleichung unter der Transformation, wegen $u_t = v_t$ und $u_{xx} = v_{xx}$, nicht ändert, lautet das transformierte Problem in v:

$$\begin{array}{rcll} v_t &=& 4v_{xx} & \text{für} \quad 0 < x < 6\,, \quad 0 < t \\ v(0,t) &=& 0 & \text{für} \qquad\quad 0 \le t \\ v(6,t) &=& 0 & \\ v(x,0) &=& u_0(x) - 3 & \text{für} \qquad 0 \le x \le 6\,. \end{array}$$

c) Die Lösungsdarstellung lautet

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{6} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{9}t\right)\,.$$

Denn aus dem Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ ergibt sich:

$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = 0,\ X(6) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_k = \dfrac{k^2\pi^2}{36},\ X_k(x) = b_k \sin\dfrac{k\pi x}{6}$

$T' + 4\lambda_k T = 0 \quad \Rightarrow \quad T_k(t) = \exp\left(-\dfrac{k^2\pi^2 t}{9}\right)\,.$

Mit der Anfangsbedingung werden die fehlenden Koeffizienten b_k berechnet.

$$v(x,0) \;=\; u_0(x) - 3 \;=\; \begin{cases} -x & \text{für} \quad 0 \le x \le 3\,, \\ x - 6 & \text{für} \quad 3 < x \le 6\,. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{3}\int_0^6 (u_0(x) - 3)\sin\left(\frac{k\pi x}{6}\right)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\int_0^3 -x\sin\left(\frac{k\pi x}{6}\right)\,dx + \frac{1}{3}\int_3^6 (x-6)\sin\left(\frac{k\pi x}{6}\right)\,dx \\ &= \frac{2x}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{6}\bigg|_0^3 - \frac{2}{k\pi}\int_0^3 \cos\left(\frac{k\pi x}{6}\right)\,dx \\ &\quad - \frac{2(x-6)}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{6}\bigg|_3^6 + \frac{2}{k\pi}\int_3^6 \cos\left(\frac{k\pi x}{6}\right)\,dx \\ &= \frac{6}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{12}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} - \frac{6}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2} - \frac{12}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} \\ &= -\frac{24}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2} \end{aligned}$$

d) Das Ausgangsproblems wird dann gelöst durch:

$$u(x,t) = 3 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{24}{k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi}{2} \sin\frac{k\pi x}{6} \exp\left(-\frac{k^2\pi^2}{9}t\right)$$

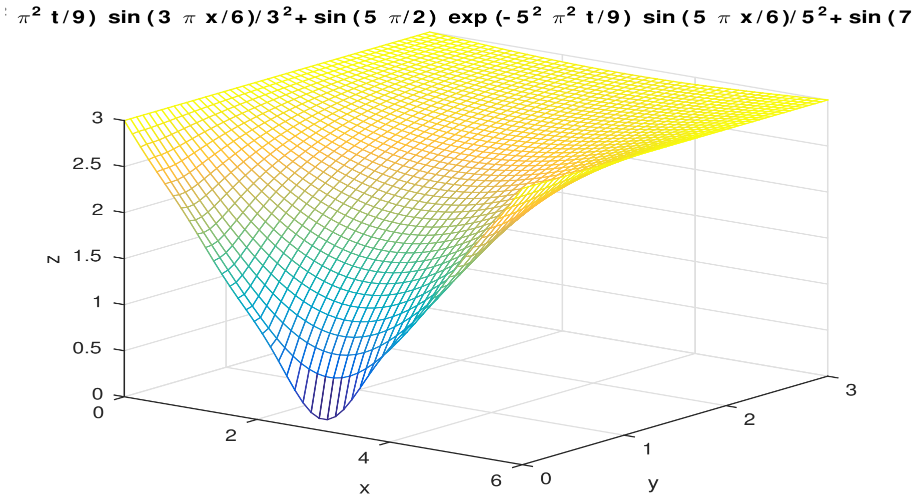

Bild 19 Näherung für $u(x,t)$ mit den ersten neun Summanden der obigen Reihe

MATLAB-Plotbefehl

```
ezmesh('x','t','3-24*(
sin(pi/2)*exp(-1^2*pi^2*t/9)*sin(pi*x/6)/1^2
+sin(3*pi/2)*exp(-3^2*pi^2*t/9)*sin(3*pi*x/6)/3^2
+sin(5*pi/2)*exp(-5^2*pi^2*t/9)*sin(5*pi*x/6)/5^2
+sin(7*pi/2)*exp(-7^2*pi^2*t/9)*sin(7*pi*x/6)/7^2
+sin(9*pi/2)*exp(-9^2*pi^2*t/9)*sin(9*pi*x/6)/9^2)/pi^2',[0,3,0,6])
```

e) Nach dem Maximumprinzip wird der Maximalwert von u auf dem Rand von G bzw. für $t = 0$ angenommen. Damit gilt

$$\max_{(x,t)\in G} u(x,t) = 3\,.$$

Die Lösung der **Anfangswertaufgabe** der Wärmeleitungsgleichung in einer Raumdimension ($n = 1$) mit homogener Differentialgleichung

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad 0 < t\,, \\ u(x,0) &= u_0(x) \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

kann berechnet werden mit

a) der **Fundamentallösung** ($n = 1$) der Wärmeleitungsgleichung

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0\,, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t < 0\,. \end{cases}$$

Die Fundamentallösung ist für $t > 0$ folgendermaßen normiert:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(x,t)\,dx = 1\,.$$

Mit der Fundamentallösung kann die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für $t > 0$ dargestellt werden durch

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y,t) \cdot u_0(y)\,dy\,.$$

b) dem **Produktansatz** $u(x,t) = X(x)T(t)$. Eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: \mu = (\text{konst})\,.$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T' - \mu T = 0 \quad \text{und} \quad X'' - \mu X = 0\,.$$

und berechnet deren allgemeine Lösungen. Anschließend setzt man die Anfangsbedingung in die resultierende Lösung u ein und versucht die auftretenden unbekannten Koeffizienten festzulegen.

Aufgabe 20:

Man berechne die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ t > 0\,, \\ u(x,0) &= e^{4x} \quad \text{für} \quad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

a) unter Verwendung der Fundamentallösung und

b) mit Hilfe eines Produktansatzes.

Lösung:

a) Für die Dimension $n = 1$ lautet die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}} & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t > 0\,, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \text{ und } t < 0\,. \end{cases}$$

Mit der Fundamentallösung kann die Lösung der Wärmeleitungsgleichung für $t > 0$ dargestellt werden durch

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-y,t) \cdot u(y,0)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x-y)^2/(4t)}}{\sqrt{4\pi t}} \cdot e^{4y}\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(x-y)^2 + 16ty}{4t}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-(y^2 - 2(x+8t)y + x^2)}{4t}\right) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-((y-(x+8t))^2 + x^2 - (x+8t)^2)}{4t}\right) dy \\ &= e^{4x+16t} \cdot \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(y-(x+8t))^2}{4t}\right) dy \\ &= e^{4x+16t} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(y-(x+8t),t)\, dy = e^{4x+16t} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(p,t)\, dp \\ &= e^{4x+16t} \end{aligned}$$

b) Der Produktansatz $u(x,t) = X(x)T(t)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} =: \mu \ = (\text{konst}) \ .$$

Man erhält die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$T' - \mu T = 0 \quad \Rightarrow \quad T(t) = Ce^{\mu t} \ ,$$

$$X'' - \mu X = 0 \quad \Rightarrow \quad X(x) = a_1 e^{\sqrt{\mu}x} + a_2 e^{-\sqrt{\mu}x}$$

und damit die Lösung aus dem Produktansatz

$$u(x,t) = Ce^{\mu t}\left(a_1 e^{\sqrt{\mu}x} + a_2 e^{-\sqrt{\mu}x}\right) \ .$$

Einsetzen der Anfangsbedingung und Koeffizientenvergleich ergibt

$$e^{4x} = u(x,0) = C\left(a_1 e^{\sqrt{\mu}x} + a_2 e^{-\sqrt{\mu}x}\right) \quad \Rightarrow \quad Ca_1 = 1 \ , \ \sqrt{\mu} = 4 \ , \ a_2 = 0 \ .$$

Die Lösung aus dem Produktansatz lautet also

$$u(x,t) = e^{4x+16t} \ .$$