Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 4

Korrekt gestellte Probleme:

Ein Problem, bei dem eine Differentialgleichung auf einem Gebiet gültig ist und zusätzlich noch Anfangs- und/oder Randbedingungen bzgl. des Gebietes gelten, heißt **korrekt gestellt** oder auch **sachgemäß**, wenn

- eine eindeutige Lösung existiert,
- die stetig von den Eingangsdaten abhängt.

Aufgabe 13:

a) Man zeige, dass die Wellengleichung $u_{tt} = 4u_{xx}$ folgende allgemeine Lösung besitzt:

$$u(x,t) = f(x-2t) + g(x+2t)\ , \quad f,g \in C^2.$$

Tipp: Man transformiere u auf die Koordinaten $\xi = x - 2t$ und $\eta = x + 2t$ und berechne die allgemeine Lösung der transformierten Differentialgleichung.

b) Man zeige, dass das folgende Randwertproblem für die Wellengleichung keine Lösung besitzt und damit kein korrekt gestelltes Problem ist

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 4u_{xx}\,, && 0 < x, t < 1 \\ u(x,0) &= x - x^2\,, && 0 \le x \le 1\,, \\ u(x,1) &= 0\,, && \\ u(0,t) &= 0\,, && 0 \le t \le 1\,, \\ u(1,t) &= 0\,. && \end{aligned}$$

Man überprüfe auch, ob die vorgegebenen Randwerte in den Eckpunkten verträglich sind.

Lösung:

a) Die Kettenregel ergibt für $u(\xi(x,t), \eta(x,t))$:

$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta$,

$u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}$,

$u_t = u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = -2u_\xi + 2u_\eta$,

$u_{tt} = -2(u_{\xi\xi}\xi_t + u_{\xi\eta}\eta_t) + 2(u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t) = 4u_{\xi\xi} - 8u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta}$

Man erhält $u_{tt} = 4u_{xx} \Leftrightarrow 16u_{\xi\eta} = 0$.

Durch Integration nach η und ξ erhält man die allgemeine Lösung

$$u(\xi,\eta) = f(\xi) + g(\eta) \Leftrightarrow u(x,t) = f(x-2t) + g(x+2t).$$

b) Zunächst wird die Kompatibilität in den Eckpunkten überprüft:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= x - x^2 && \Rightarrow u(0,0) = 0\,,\ u(1,0) = 0 \\ u(x,1) &= 0 && \Rightarrow u(0,1) = 0\,,\ u(1,1) = 0\,, \\ u(0,t) &= 0 && \Rightarrow u(0,0) = 0\,,\ u(0,1) = 0 \\ u(1,t) &= 0 && \Rightarrow u(1,0) = 0\,,\ u(1,1) = 0\,. \end{aligned}$$

Hier ergibt sich also kein Widerspruch.

Die allgemeine Lösung der Wellengleichung besitzt die Darstellung

$$u(x,t) = f(x-2t) + g(x+2t)\,,$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen $f, g \in C^2$.

Aus den Randdaten erhält man

$0 = u(0,t) = f(-2t) + g(2t) \overset{\mu=2t}{\Rightarrow} g(\mu) = -f(-\mu)$

$\Rightarrow u(x,t) = f(x-2t) - f(-x-2t)$

$0 = u(1,t) = f(1-2t) - f(-1-2t) \overset{\mu=1-2t}{\Rightarrow} f(\mu) = f(\mu-2)$

$x - x^2 = u(x,0) = f(x) - f(-x)$

$\quad = f(x-2) - f(-x-2) = u(x,1) = 0$

Dies führt auf den Widerspruch $x - x^2 = 0$, da $x \in [0,1]$ beliebig.

Die Laplace Gleichung auf einem Rechteck

Berechnet werden soll die Lösung der Randwertaufgabe

$$
\begin{aligned}
u_{xx} + u_{yy} &= 0\,, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,\\
u(x,0) &= h_1(x)\,, \quad u(x,b) = h_2(x)\,, \quad 0 \le x \le a\\
u(0,y) &= h_3(y)\,, \quad u(a,y) = h_4(y)\,, \quad 0 \le y \le b.
\end{aligned}
$$

Wir können annehmen, dass u in den Eckpunkten gleich Null ist. Ist dies nicht der Fall, so wird die harmonische Funktion $u_b(x,y) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy$, die die Funktionswerte in den Eckpunkten interpoliert, berechnet und vorher von u abgezogen.

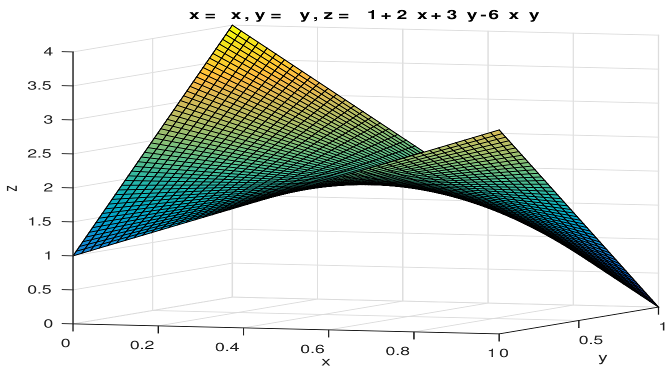

Bild $u(0,0) = 1,\ u(1,0) = 3,\ u(0,1) = 4,\ u(1,1) = 0$ mit $u_b(x,y) = 1 + 2x + 3y - 6xy$

Die Lösung des obigen Problems kann auf Grund der Linearität von Δu aus Teillösungen u_i , $i = 1,2,3,4$ aufgebaut werden, für die $h_i \neq 0$ und $h_{j\neq i} = 0$ gilt.

Jede dieser Teillösungen lässt sich über einen **Produktansatz** der Form $u(x,y) = f(x)\cdot g(y)$ berechnen. Setzt man diesen in die Differentialgleichung ein, so ergibt sich

$$f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0.$$

Durch Separation erhält man

$$-\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(y)}{g(y)} =: \lambda\,.$$

Da die obigen Quotienten für alle x und y gelten, müssen sie notwendig konstant sein. Diese Konstante werde mit λ bezeichnet. Damit ergeben sich zwei gewöhnliche Differentialgleichungen in x bzw. in y

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad \text{und} \quad g''(y) - \lambda g(y) = 0\,.$$

Der Produktansatz ergibt für die **Randbedingungen**, beispielsweise für u_1, d.h. $h_1 \neq 0$ und $h_2 = h_3 = h_4 = 0$

$0 = h_3 = u(0,y) = f(0)g(y) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

(sonst gilt $g \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0)$,

$0 = h_4 = u(a, y) = f(a)g(y) \quad \Rightarrow \quad f(a) = 0.$

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad \text{mit} \quad f(0) = 0 = f(a),$$

besitzt folgende Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen

$$\lambda_k = \frac{k^2\pi^2}{a^2}, \quad f_k(x) = \sin\frac{k\pi x}{a}.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung von $g''(y) - \dfrac{k^2\pi^2}{a^2} g(y) = 0$

$$g_k(y) = \tilde{c}_k e^{k\pi y/a} + \tilde{d}_k e^{-k\pi y/a} = c_k \cosh\frac{k\pi y}{a} + d_k \sinh\frac{k\pi y}{a}.$$

Mit einem weiteren Basiswechsel

$$g_k(y) = a_k \cosh\frac{k\pi(y-b)}{a} + b_k \sinh\frac{k\pi(y-b)}{a}$$

(Additionstheoreme der Hyperbelfunktionen lauten: $\sinh(s+t) = \sinh s \cosh t + \cosh s \sinh t$ und $\cosh(s+t) = \cosh s \cosh t + \sinh s \sinh t$) vereinfacht sich die Lösungsdarstellung für die Randbedingung

$$0 = h_2 = u(x, b) = f(x)g(b) \Rightarrow g(b) = 0 \Rightarrow g_k(y) = b_k \sinh\frac{k\pi(y-b)}{a}.$$

Da die Differentialgleichung linear ist, erhält man durch **Superposition** eine Lösungsdarstellung der Form

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh\frac{k\pi(y-b)}{a} \sin\frac{k\pi x}{a}.$$

Die verbleibende Randbedingung ergibt

$$h_1(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} -b_k \sinh\frac{k\pi b}{a} \sin\frac{k\pi x}{a},$$

d.h. h_1 muss in eine ungerade $T = 2a$-periodische Fourierreihe entwickelt werden mit den Fourierkoeffizienten:

$$-b_k \sinh\frac{k\pi b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a h_1(x) \sin\frac{k\pi x}{a} dx.$$

Maximum-Prinzip für harmonische Funktionen:

Es seien D eine offene, beschränkte und zusammenhängende Menge und die Funktion u harmonisch ($\Delta u = 0$) auf D. Außerdem sei u stetig auf $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Dann werden maximaler und minimaler Funktionswert von u auf dem Rand ∂D von D angenommen.

Aufgabe 14:
Man löse die Randwertaufgabe

$$\begin{aligned}\Delta u &= 0\,, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2, \\ u(x,0) &= 2\sin(3\pi x)\,, \quad u(x,2) = 0\,, \quad 0 \le x \le 1 \\ u(0,y) &= 0\,, \quad u(1,y) = 0\,, \quad 0 \le y \le 2\end{aligned}$$

durch einen Separationsansatz der Form $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$, berechne minimalen und maximalen Funktionswert von u und zeichne die Lösung.

Lösung:

Einsetzen von $u(x,y) = f(x) \cdot g(y)$ in die Differentialgleichung ergibt

$$f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0.$$

Durch Seperation erhält man

$$-\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(y)}{g(y)} =: \lambda\,.$$

Da die obigen Quotienten für alle x und y gelten, müssen sie notwendig konstant sein. Diese Konstante werde mit λ bezeichnet. Damit ergeben sich zwei gewöhnliche Differentialgleichungen in x bzw. in y

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad \text{und} \quad g''(y) - \lambda g(y) = 0\,.$$

Der Produktansatz in die Randbedingungen eingesetzt ergibt

$0 = u(0,y) = f(0)g(y) \quad \Rightarrow \quad f(0) = 0$

(sonst gilt $\quad g \equiv 0 \;\Rightarrow\; u \equiv 0)$,

$0 = u(1,y) = f(1)g(y) \quad \Rightarrow \quad f(1) = 0.$

Die gewöhnliche Randeigenwertaufgabe

$$f''(x) + \lambda f(x) = 0 \quad \text{mit} \quad f(0) = 0 = f(1),$$

besitzt folgende Eigenwerte mit zugehörigen Eigenfunktionen

$$\lambda_k = k^2\pi^2\,, \quad f_k(x) = \sin k\pi x.$$

Damit lautet die allgemeine Lösung von $g''(y) - k^2\pi^2 g(y) = 0$

$$g_k(y) = \tilde{c}_k e^{k\pi y} + \tilde{d}_k e^{-k\pi y} = c_k \cosh k\pi y + d_k \sinh k\pi y\,.$$

Mit $0 = u(x,2) = f(x)g(2) \;\Rightarrow\; g(2) = 0$ und man erhält mit Hilfe der Funktionalgleichung $\sinh(s+t) = \sinh s \cosh t + \cosh s \sinh t$

$$g_k(y) = b_k \sinh k\pi(y-2).$$

Da die Differentialgleichung linear ist erhält man durch Superposition eine Lösungsdarstellung der Form

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh k\pi(y-2) \sin k\pi x \, .$$

Über die verbleibende Randbedingung

$$2\sin(3\pi x) = u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} -b_k \sinh 2k\pi \sin k\pi x \, .$$

ergeben sich die b_k aus den Fourierkoeffizienten von $2\sin(3\pi x)$ hier über eine Koeffizientenvergleich:

$$2 = -b_3 \sinh 6\pi.$$

Die Lösung lautet daher $\quad u(x,y) = -\dfrac{2\sinh 3\pi(y-2)}{\sinh 6\pi} \sin 3\pi x \, .$

Nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen werden minimaler und maximaler Funktionswert auf dem Rand angenommen. Hier sind es also die Extrema von $u(x,0) = 2\sin(3\pi x)$:

$$u_{\min} = u\left(\frac{1}{2}, 0\right) = 2\sin(3\pi/2) = -2 \, , \quad u_{\max} = u\left(\frac{1}{6}, 0\right) = 2.$$

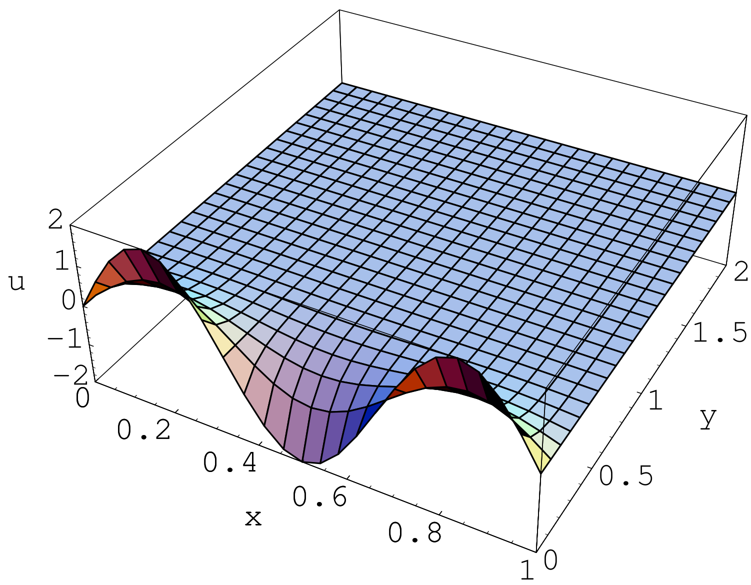

Bild 14 Lösung $u(x,y)$

Plotbefehl in Mathematica:

```
Plot3D[-2*Sinh[3*Pi*(y - 2)]*Sin[3*Pi*x]/Sinh[6*Pi],
{x, 0, 1}, {y, 0, 2},AxesLabel -> {"x", "y", "u"},
PlotRange -> {-2, 2}]
```

Zum Produktansatz in Polarkoordinaten:

Die Laplacegleichung in kartesischen Koordinaten $u_{xx} + u_{yy} = 0$ besitzt in Polarkoordinaten $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ folgende Dartstellung:

$$u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_{\varphi\varphi}}{r^2} = 0 \quad \overset{r>0}{\Leftrightarrow} \quad r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0\ .$$

Mit Hilfe eines Produktansatzes der Form $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ erhält man

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \lambda$$

und damit die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 R'' + rR' - \lambda R = 0 \quad , \quad \Phi'' + \lambda\Phi = 0\ .$$

Ist das zu Grunde liegende Gebiet ein Kreisring, so muss $(\Phi(0) = \Phi(2\pi))$ gelten. Damit kommen nur 2π-periodische Lösungen für $\Phi(\varphi)$ in Frage ($\lambda_k = k^2\ , k \in \mathbb{N}_0$):

$$\Phi_0(\varphi) = a_0\ , \quad \Phi_k(\varphi) = a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi)\ .$$

Bei der Lösung der Differentialgleichung in $R(r)$ unterscheidet man

1.Fall: $\lambda_0 = 0$:

$$0 = r^2 R'' + rR' \quad \Rightarrow \quad R'(r) = \frac{c_0}{r} \quad \Rightarrow \quad R_0(r) = c_0 \ln r + d_0$$

2.Fall: $\lambda_k = k^2 > 0$:

Der Ansatz $R(r) = r^\alpha$ eingesetzt in $r^2 R'' + rR' - k^2 R = 0$ liefert

$$r^\alpha(\alpha(\alpha - 1) + \alpha - k^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = k^2 \quad \Rightarrow \quad R_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k}\ .$$

Die sich aus dem Produktansatz ergebenden Lösungen lauten also:

$$u_k(r, \varphi) \;=\; R_k(r) \cdot \Phi_k(\varphi) \;=\; \begin{cases} A_0 + B_0 \ln r & , \quad k = 0 \\ (A_k r^k + C_k r^{-k}) \cos(k\varphi) & , \quad k > 0 \\ +(B_k r^k + D_k r^{-k}) \sin(k\varphi)\ . & \end{cases}$$

Durch Superposition erhält man damit für $0 < R_1 < r < R_2 < \infty$ die Lösung

$$u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + C_k r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k + D_k r^{-k}) \sin(k\varphi)\ .$$

Aufgabe 15:

Gegeben sei das folgende Dirichlet-Problem im Kreisring
$2 < r = \sqrt{x^2 + y^2} < 3$ (in Polarkoordinaten):

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\varphi\varphi} = 0 \,,$$

$$u(2, \varphi) = \cos\varphi \,,$$

$$u(3, \varphi) = 1 + \frac{65}{144}\sin(2\varphi) \,.$$

Man berechne die Lösung in Polarkoordinaten, gebe sie in kartesischen Koordinaten an und zeichne sie.

Lösung:

Der Produktansatz $u(r, \varphi) = R(r) \cdot \Phi(\varphi)$ eingesetzt in die Differentialgleichung, ergibt die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$r^2 R''\Phi + rR'\Phi + R\Phi'' = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r^2 R'' + rR'}{R} = -\frac{\Phi''}{\Phi} =: \lambda$$

Da $\Phi(\varphi)$ im Kreisring 2π-periodisch sein muss ($\Phi(0) = \Phi(2\pi)$), erhält man nichttriviale Lösungen $\Phi(\varphi)$ nur für $\lambda \geq 0$, nämlich für $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_k = k^2$:

$$\Phi_0(\varphi) = a_0 \,, \quad \Phi_k(\varphi) = a_k \sin(k\varphi) + b_k \cos(k\varphi) \,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Setzt man $\lambda_0 = 0$ und $\lambda_k = k^2$ in die Differentialgleichung für $R(r)$ ein, so erhält man dort die Lösungen

$$R_0(r) = c_0 + d_0 \ln r \,, \quad R_k(r) = c_k r^k + d_k r^{-k} \,.$$

Durch Superposition ergibt sich aus dem Produktansatz damit die Lösungsdarstellung im Kreisring

$$u(r, \varphi) = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k r^k + C_k r^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k r^k + D_k r^{-k}) \sin(k\varphi) \,.$$

Die Randbedingung

$$\begin{aligned} u(2, \varphi) &= \cos(\varphi) \\ &= A_0 + B_0 \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k 2^k + C_k 2^{-k}) \cos(k\varphi) + (B_k 2^k + D_k 2^{-k}) \sin(k\varphi) \end{aligned}$$

ergibt $A_0 + B_0 \ln 2 = 0 \,, \quad 2A_1 + C_1/2 = 1,$

sonst $A_k 2^k + C_k 2^{-k} = 0 = B_k 2^k + D_k 2^{-k} \,.$

Die Randbedingung

$$\begin{aligned} u(3,\varphi) &= 1 + \frac{65}{144}\sin(2\varphi) \\ &= A_0 + B_0 \ln 3 + \sum_{k=1}^{\infty}(3^k A_k + 3^{-k} C_k)\cos(k\varphi) + (3^k B_k + 3^{-k} D_k)\sin(k\varphi) \end{aligned}$$

ergibt $A_0 + B_0 \ln 3 = 1$, $9B_2 + \frac{D_2}{9} = \frac{65}{144}$,

sonst $3^k A_k + 3^{-k} C_k = 0 = 3^k B_k + 3^{-k} D_k$.

Lösen des Gleichungssystems für A_0, B_0:

$$\begin{pmatrix} 1 & \ln 2 \\ 1 & \ln 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_0 = \frac{-\ln 2}{\ln 3 - \ln 2}\,, \quad B_0 = \frac{1}{\ln 3 - \ln 2}$$

Die Koeffizientenmatrizen für $k \geq 1$ sind regulär, denn

$$\det\begin{pmatrix} 2^k & 2^{-k} \\ 3^k & 3^{-k} \end{pmatrix} = \frac{2^k}{3^k} - \frac{3^k}{2^k} = \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(1 - \left(\frac{9}{4}\right)^k\right) \neq 0$$

Man erhält nur die von 0 verschiedenen Koeffizienten

$$\begin{pmatrix} 2 & 1/2 \\ 3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 \\ C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A_1 = -\frac{2}{5}\,,\; C_1 = \frac{18}{5}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1/4 \\ 9 & 1/9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 65/144 \end{pmatrix} \Rightarrow B_2 = \frac{1}{16}\,,\; D_2 = -1$$

Damit lautet die Lösung

$$u(r,\varphi) = \frac{\ln r - \ln 2}{\ln 3 - \ln 2} + \left(\frac{18}{5r} - \frac{2r}{5}\right)\cos\varphi + \left(\frac{r^2}{16} - \frac{1}{r^2}\right)\sin(2\varphi)\,.$$

Umwandlung in kartesische Koordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ mit $\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)$

Man erhält so z.B.: $r^2\sin(2\varphi) = 2r\sin(\varphi)r\cos(\varphi) = 2xy$

$$u(x,y) = \frac{\ln\sqrt{x^2+y^2} - \ln 2}{\ln 3 - \ln 2} + \frac{18x}{5(x^2+y^2)} - \frac{2x}{5} + \frac{xy}{8} - \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

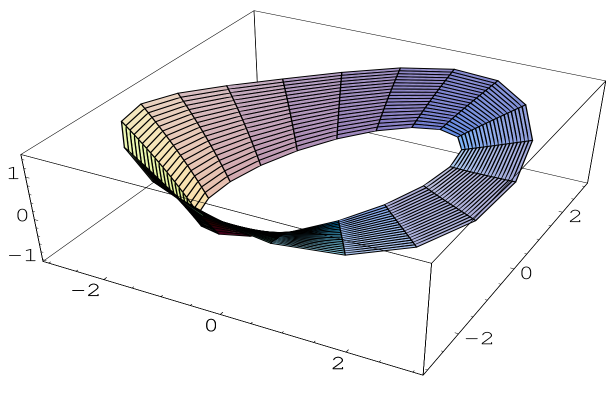

Bild 15 Lösung $u(r,\varphi)$

Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen:

a) $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^2$: $\quad u(\boldsymbol{x}_0) = \dfrac{1}{2\pi R} \displaystyle\int\limits_{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0||=R} u(\boldsymbol{x})\, ds$

b) $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^3$: $\quad u(\boldsymbol{x}_0) = \dfrac{1}{4\pi R^2} \displaystyle\int\limits_{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0||=R} u(\boldsymbol{x})\, do$

Aufgabe 16:

a) Man zeige, dass der Laplace-Operator im $\mathbb{R}^2$ invariant gegenüber Drehungen ist, d.h. für die um den Winkel φ gedrehten Koordinaten

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gilt $u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}$.

b) Unter Verwendung der Mittelwerteigenschaft berechne man für die Lösung u des Problems

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad &\text{für} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 < 25\,, \\ u(x,y) = xy \quad &\text{für} \quad (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25 \end{aligned}$$

den Wert $u(1,1)$.

Lösung:

a) Für die Koordinaten

$$\xi = x\cos\varphi + y\sin\varphi \quad \text{und} \quad \eta = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$$

erhält man:

$$\xi_x = \cos\varphi\ ,\ \eta_x = -\sin\varphi\ ,\ \xi_y = \sin\varphi\ ,\ \eta_y = \cos\varphi\ .$$

Nach der Kettenregel gilt daher

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x \;=\; u_\xi \cos\varphi - u_\eta \sin\varphi \\ u_{xx} &= (u_{\xi\xi}\cos\varphi - u_{\xi\eta}\sin\varphi)\cos\varphi - (u_{\eta\xi}\cos\varphi - u_{\eta\eta}\sin\varphi)\sin\varphi \\ &= u_{\xi\xi}\cos^2\varphi - 2u_{\xi\eta}\sin\varphi\cos\varphi + u_{\eta\eta}\sin^2\varphi \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y \;=\; u_\xi \sin\varphi + u_\eta \cos\varphi \\ u_{yy} &= (u_{\xi\xi}\sin\varphi + u_{\xi\eta}\cos\varphi)\sin\varphi + (u_{\eta\xi}\sin\varphi + u_{\eta\eta}\cos\varphi)\cos\varphi \\ &= u_{\xi\xi}\sin^2\varphi + 2u_{\xi\eta}\sin\varphi\cos\varphi + u_{\eta\eta}\cos^2\varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad u_{xx} + u_{yy} = u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta}\ .$$

b) Die Mittelwerteigenschaft für harmonische Funktionen u im $\mathbb{R}^2$ besagt, dass sich der Funktionswert von u im Mittelpunkt $\boldsymbol{x}_0$ eines Kreises vom Radius R berechnen lässt durch Integration längs des Kreisrandes

$$u(\boldsymbol{x}_0) = \frac{1}{2\pi R} \int\limits_{||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0||=R} u(\boldsymbol{x})\, ds\ .$$

Für den in der Aufgabenstellung vorliegenden Fall $\boldsymbol{x}_0 = (1,1)$ und $R = 5$ berechnen wir das Kurvenintegral 1.Art durch Parametrisierung des Kreisrandes in Polarkoordinaten

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{c}(\varphi) = \begin{pmatrix} 5\cos\varphi + 1 \\ 5\sin\varphi + 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad ||\dot{\mathbf{c}}(\varphi)|| = 5 \quad \Rightarrow \quad ds = 5d\varphi.$$

$$\begin{aligned} u(1,1) &= \frac{1}{10\pi} \int\limits_0^{2\pi} 5(5\cos\varphi + 1)(5\sin\varphi + 1)\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} 25\cos\varphi\sin\varphi + 5\cos\varphi + 5\sin\varphi + 1\, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 1\ . \end{aligned}$$

Bemerkung:
$u(x,y) = xy$ erfüllt $u_{xx} + u_{yy} = 0$ und löst daher die Randwertaufgabe selbst.
Es gilt also $u(1,1) = 1 \cdot 1 = 1$.