Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Dr. K. Rothe ©

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 3

Burgers-Gleichung

Ein Spezialfall einer quasilineare skalaren Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension ist gegeben durch die **Burgers-Gleichung**

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)\,.$$

Für das zugehörige Cauchy-Problem wird noch verlangt:

$$u(x,0) = u_0(x)\,.$$

Die charakteristischen Differentialgleichungen für das erweiterte Problem

$$t'(s) = 1\,, \quad x'(s) = u\,, \quad u'(s) = 0$$

ergeben $t = s$ und damit

$$u'(t) = 0 \;\Rightarrow\; u(t) = C \;\Rightarrow\; x'(t) = u = C \;\Rightarrow\; x(t) = Ct + D.$$

Mit den Anfangsdaten $x(0) = x_0$ und $u(x(0),0) = u_0(x(0)) = u_0(x_0)$ erhält man die Charakteristiken

$$\begin{pmatrix} t \\ x(t) \\ u(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ x_0 + tu_0(x_0) \\ u_0(x_0) \end{pmatrix}$$

Auf den **Grundcharakteristiken**, also den Geraden $\begin{pmatrix} t \\ x_0 + tu_0(x_0) \end{pmatrix}$ wird der konstante Anfangsfunktionswert $u_0(x_0)$ angenommen, oder besser weitertransportiert.

Aufgabe 9:

Gegeben sei das folgende Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \quad \text{mit} \quad u(x,0) = u_0(x)\,.$$

a) Man berechne die allgemeine Lösung mit Hilfe der Charakteristikenmethode.

b) Man löse die Aufgabe für die Anfangsdaten

(i) $u_0(x) = 2(x+1)$ und

(ii) $u_0(x) = 2(1-x)$,

zeichne die charakteristischen Grundkurven und gebe den Zeitpunkt T an, bis zu dem die Lösung existiert.

Lösung:

a) Der quasilinearen Burgers-Gleichung

$$0 = u_t + uu_x$$

wird das erweiterte Problem

$$U_t + uU_x + 0 \cdot U_u = 0$$

zugeordnet. Die charakteristischen Differentialgleichungen

$$t'(s) = 1\,, \quad x'(s) = u\,, \quad u'(s) = 0$$

ergeben $t = s$ und somit $\quad u'(t) = 0 \;\Rightarrow\; u(t) = C \quad$ und

$x'(t) = u = C \;\Rightarrow\; x = Ct + D \;\Rightarrow\; D = x - ut$

Damit wird die allgemeine Lösung durch die folgende implizite Gleichung mit einer C^1-Funktion Φ beschrieben:

$$\Phi\,(u, x - ut) = 0\,.$$

Angenommen diese implizite Lösungsdarstellung lässt sich nach dem Satz über implizite Funktionen nach der ersten Komponente auflösen, so erhält man mit einer unbekannten Funktion ψ die implizite Lösungsdarstellung

$$u(x,t) = \psi\,(x - u(x,t)t)\;.$$

b) (i) Die Anfangsbedingung $u(x,0) = 2(x+1)$ führt auf

$$2(x+1) = u(x,0) = \psi\,(x - u(x,0)\cdot 0) = \psi(x)\,.$$

Die implizite Lösungsdarstellung der Anfangswertaufgabe lautet also

$$u(x,t) = \psi\,(x - u(x,t)t) = 2\,(x - u(x,t)t + 1)\;.$$

Auflösen nach u ergibt für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$ die Lösung die explizite Darstellung

$$u(x,t) = \frac{2x+2}{2t+1}\,.$$

Charakteristische Grundkurve: $(x(t),t)$ mit

$$x(t) = u_0(x_0)t + x_0 = 2(x_0+1)t + x_0\,.$$

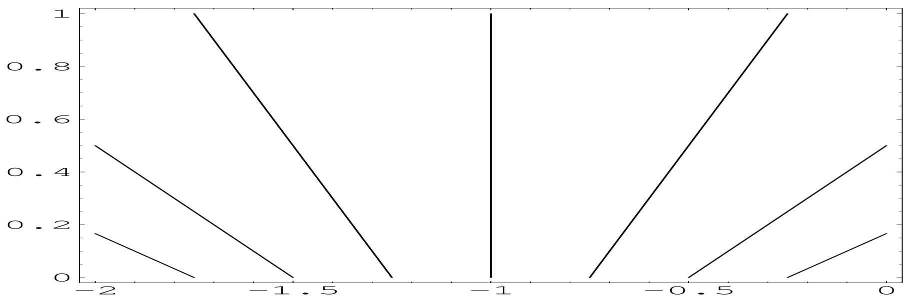

Bild 9 b) (i): $x(t) = 2(x_0+1)t + x_0$

(ii) Die Anfangsbedingung $u(x,0) = 2(1-x)$ führt auf

$$2(1-x) = u(x,0) = \psi\,(x - u(x,0)\cdot 0) = \psi(x)\,.$$

Die implizite Lösungsdarstellung der Anfangswertaufgabe lautet also

$$u(x,t) = \psi\,((x - u(x,t)t) = 2\,(1 - x + u(x,t)t)\ .$$

Auflösen nach u ergibt für alle $(x,t) \in \mathbb{R} \times \left(0,\frac{1}{2}\right)$ die explizite Darstellung

$$u(x,t) = \frac{2-2x}{1-2t}\,.$$

Für $T = \frac{1}{2}$ besitzt diese Lösung eine Singularität.
Charakteristische Grundkurve: $x(t) = 2(1-x_0)t + x_0$.

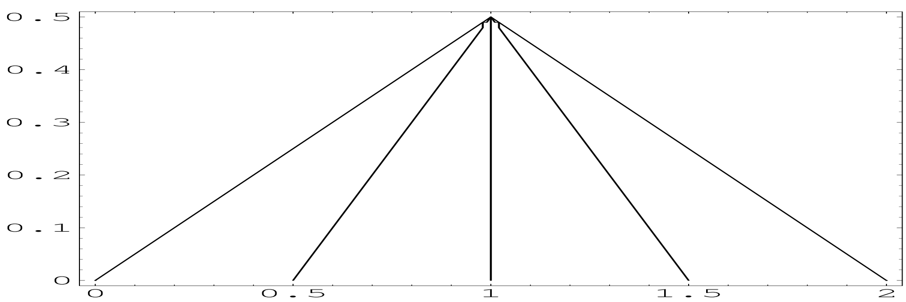

Bild 9 b) (ii): $x(t) = 2(1-x_0)t + x_0$

Im Punkt $(x,t) = \left(1,\frac{1}{2}\right)$ schneiden sich alle charakteristischen Grundkurven.

Burgers-Gleichung und Riemann-Problem

Liegt eine unstetige Anfangsfunktion u_0 vor, z.B. folgende Sprungfunktion

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & , \quad x \leq x_0 \\ u_r & , \quad x_0 < x \, , \end{cases}$$

so wird das zugehörige Cauchy-Problem auch als **Riemann-Problem** bezeichnet.

Für $t > 0$ und $u_l < u_r$ schöpfen die Grundcharakteristiken

$$\boldsymbol{c}(t) = (t, u_0(x_0)t + x_0)^T$$

nicht die Halbebene $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ aus, es gibt dann also einen Bereich in dem zunächst keine Lösung erklärt ist.

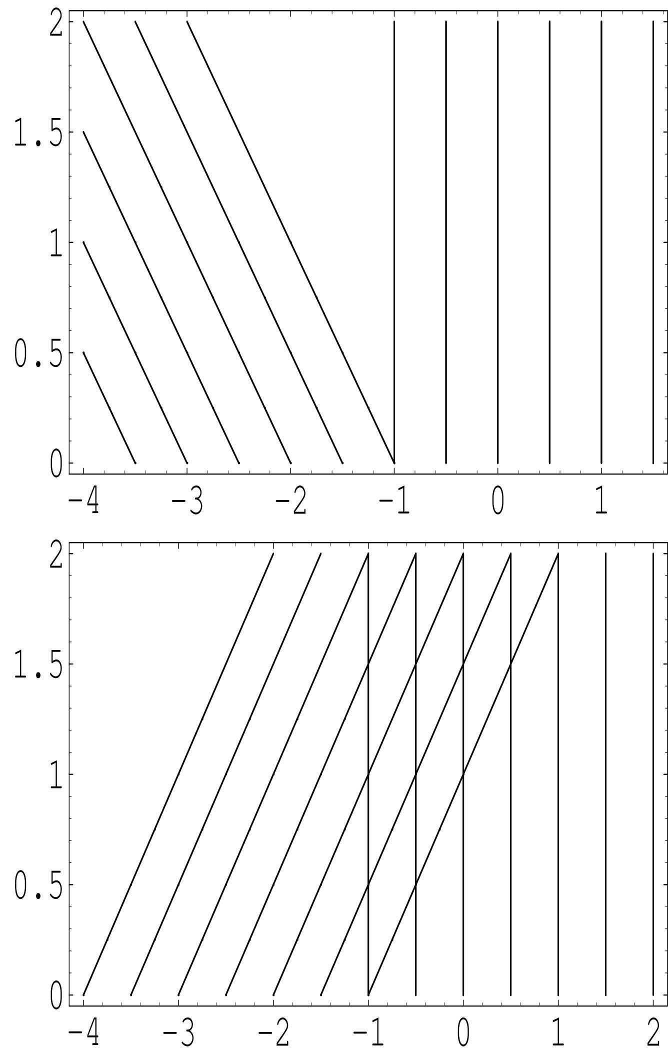

Bild: $x_0 = -1$; oben: $u_l = -1 < u_r = 0$, unten: $u_l = 1 > u_r = 0$

Für $t > 0$ und $u_l > u_r$ überschneiden sich zwei Grundcharakteristiken in einem Bereich der Halbebene $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, so dass zunächst nicht klar ist, welche durch die Grundcharakteristiken (durch x_1 bzw. x_2) transportierte Ausbreitungsgeschwindigkeit $u_0(x_1)$ bzw. $u_0(x_2)$ im Schnittpunkt gültig ist.

Für diesen Fall ($u_l > u_r$) wird eine sogenannte **Stoßwelle** definiert durch

$$u_s(x,t) = \begin{cases} u_l & , \quad x \leq s(t) \\ u_r & , \quad s(t) < x \, . \end{cases}$$

Der Verlauf der **Stoßfront** $s(t)$ wird festgelegt durch die gewöhnliche Anfangswertaufgabe **(Rankine-Hugoniot Bedingung)**

$$\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \frac{u_l + u_r}{2} \, , \quad s(0) = x_0 \, .$$

Auf dieser Stoßfront pflanzt sich also der Geschwindigkeitssprung, der durch die Anfangsgeschwindigkeit u_0 in x_0 vorgegeben ist, fort.

Unabhängig davon, ob eine physikalisch sinnvolle Interpretation möglich ist, lässt sich die Stoßfront und damit die Stoßwelle auch für den Fall $u_l < u_r$ berechnen.

Für den Fall $u_l < u_r$ wird im charakteristikenfreien Bereich der Halbebene $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ die außerhalb berechenbare Lösung $u(x,t)$ affinlinear in x und insgesamt stetig fortgesetzt durch eine sogenannte **Verdünnungswelle**

$$u_v(x,t) = \begin{cases} u_l & , \quad x \leq u_l t + x_0 \\ \dfrac{x - x_0}{t} & , \quad u_l t + x_0 \leq x \leq u_r t + x_0 \\ u_r & , \quad u_r t + x_0 \leq x \, . \end{cases}$$

Auf Grund fehlender Stetigkeits- bzw. Differenzierbarkeitseigenschaften erfüllen Stoß- und Verdünnungswelle nicht in der gesamten Halbebene $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ die Burgers-Gleichung. Sie sind aber schwache Lösungen der zugeordneten Integralgleichung.

Als physikalisch sinnvolle Integrallösung wird die **Entropielösung** festgelegt, also die Lösung, die die **Entropiebedingung** erfüllt:

Es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $t > 0$, $z > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$u(x+z,t) - u(x,t) < \frac{Cz}{t} \, .$$

(Dies ist bzgl. der x-Komponente eine Stetigkeitsforderung im monoton wachsenden Fall.)

Aufgabe 10:

Gegeben sei das Anfangswertproblem für die Burgers-Gleichung

$$u_t + uu_x = 0 \quad \text{für} \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,T)$$

mit

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 0 & , & x \leq -2 \\ 1 & , & -2 < x \leq 0 \\ -1 & , & 0 < x & . \end{cases}$$

a) Man berechne die Entropielösung für $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,2)$.

b) Man zeichne die Grundcharakteristiken ggf. mit Stoßfront im Rechteck $(x,t) \in (-3,1) \times (0,2)$.

c) Man zeichne $u(x,0)$, $u(x,1)$, $u(x,2)$ für $x \in (-3,1)$.

Lösung:

a) Der Sprung von u_0 bei $x_0 = -2$ erzeugt eine Verdünnungswelle u_v.
Mit $u_l = 0 < u_r = 1$ erhält man

$$u_v(x,t) = \begin{cases} 0 & , & x \leq -2 \\ \dfrac{x+2}{t} & , & -2 < x \leq -2+t \\ 1 & , & -2+t < x \end{cases}$$

Die Entropiebedingung

$$u(x+z,t) - u(x,t) < \frac{Cz}{t} \quad \text{für} \quad t, z, C > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

wird von u_v, auf Grund der Stetigkeit von u_v, erfüllt.

Außerdem kann man eine Stoßwelle u_s berechnen. Die Rankine-Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = \frac{1}{2}(0+1) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad s(t) = \frac{t}{2} + C$$

Mit $s(0) = x_0 = -2$ erhält man die Stoßfront $s_0(t) = \dfrac{t}{2} - 2$ und damit die Stoßwelle.

$$u_s(x,t) = \begin{cases} 0 & , & x \leq \dfrac{t}{2} - 2 = s(t) \\ 1 & , & \dfrac{t}{2} - 2 < x & . \end{cases}$$

Die Entropiebedingung für u_s ergibt z.B für $x = s(t)$ einen Widerspruch

$$u_s(s(t)+z,t) - u_s(s(t),t) = 1 - 0 = 1 < \frac{Cz}{t}\ .$$

Diese Bedingung ist nur für $\frac{t}{C} < z$ und nicht für alle $z > 0$ erfüllt. Also ist u_v die Entropielösung.

Der Sprung von u_0 bei $x_1 = 0$ führt nur zu einer Stoßwelle mit $u_l = 1 > u_r = -1$. Eine Verdünnungswelle ist hier nicht definiert.

Die Rankine-Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{1}{2}(u_l + u_r) = \frac{1}{2}(1 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad s(t) = C$$

Mit $s(0) = x_1 = 0$ erhält man die Stoßfront $s_1(t) = 0$ und damit die Stoßwelle.

$$u_s(x,t) = \begin{cases} 1 & , \quad x \le 0 \\ -1 & , \quad 0 < x \; . \end{cases}$$

Die Entropiebedingung ist wegen $u(x+z,t) - u(x,t) \le 0 < \frac{Cz}{t}$ automatisch erfüllt.

Damit lautet die gesamte Entropielösung also

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & , \quad x \le -2 \\ \dfrac{x+2}{t} & , \quad -2 < x \le -2+t \\ 1 & , \quad -2+t < x \le 0 \\ -1 & , \quad 0 < x \; . \end{cases}$$

Diese Lösung ist jedoch nur für $-2+t \le 0 \Rightarrow t \le 2 =: T$ definiert, also nur bis zu dem Zeitpunkt, wo die Verdünnungswelle auf die Stoßfront der Stoßwelle trifft.

b)

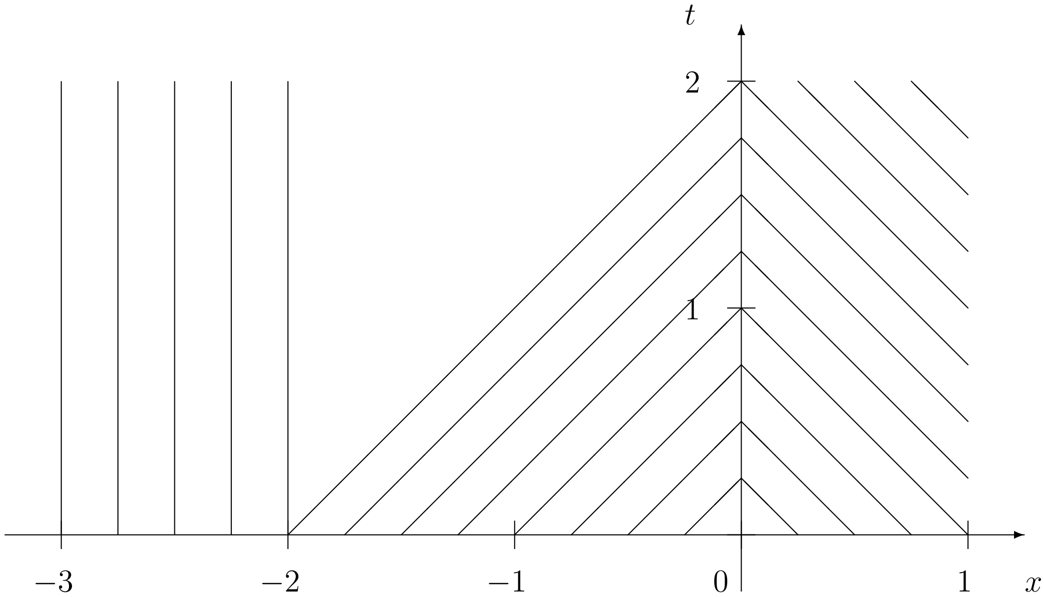

Bild 10 b) Grundcharakteristiken mit Stoßfront

c)

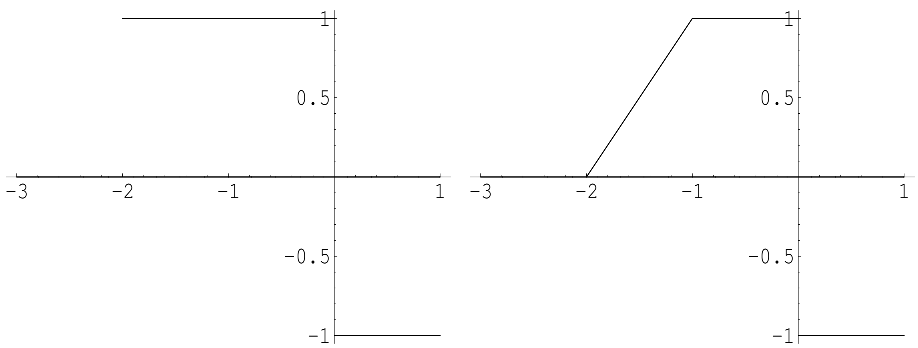

Bild 10 c) (i): $u(x, 0)$, $u(x, 1)$

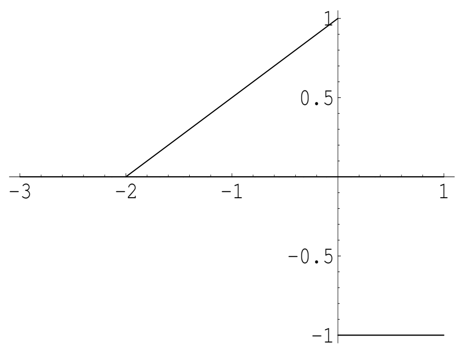

Bild 10 c) (ii): $u(x, 2)$

Lineare partielle Differentialgleichungen 2.Odnung

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\boldsymbol{x}) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(\boldsymbol{x}) u_{x_i} + f(\boldsymbol{x}) u = g(\boldsymbol{x}) \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}$$

Der Fall $n = 2$ mit $\boldsymbol{x} = (x, y)$:

DGl-Typ: $au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$,

mit Koeffizientenfunktionen $a = a(x, y), \dots, g = g(x, y)$.

Matrix-Vektorschreibweise: (∇ = Nabla Operator)

$$\nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}} \nabla u + \left(d - \nabla^T \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, e - \nabla^T \begin{pmatrix} b \\ c \end{pmatrix} \right) \nabla u + fu = g$$

Da als Lösung u eine C^2-Funktion gesucht wird, kann auch für $n > 2$ die Matrix $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ symmetrisch gewählt werden.

Die **Typeneinteilung** der linearen partiellen Differentialgleichungen 2.Ordnung wird durch den durch $\boldsymbol{A}$ beschriebenen **Hauptteil**, also allein über die zweiten Ableitungen, in Anlehnung an die Klassifikation von Kegelschnitten, mit den Eigenwerten λ_i, $i = 1, \dots, n$ von $\boldsymbol{A}$ vorgenommen:

DGL-Typ		
elliptisch	:	alle $\lambda_i \neq 0$ und alle λ_i besitzen gleiches Vorzeichen ,
parabolisch	:	es gibt ein k mit $\lambda_k = 0$,
hyperbolisch	:	alle $\lambda_i \neq 0$ und ein Eigenwert besitzt ein anderes Vorzeichen als alle anderen ,
ultrahyperbolisch	:	alle anderen Fälle .

Für $n = 2$ erhält man damit:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det \boldsymbol{A} = ac - b^2 \begin{cases} > 0 & \textbf{elliptisch} \\ = 0 & \textbf{parabolisch} \\ < 0 & \textbf{hyperbolisch} . \end{cases}$$

Aufgabe 11:

Man schreibe folgende partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung in Matrix-Vektorschreibweise, bestimme den Typ und skizziere im $\mathbb{R}^2$ gegebenenfalls die Gebiete unterschiedlichen Typs:

a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_y + x^2 u = 1$,

b) $(y+2)u_{xx} + 4xu_{xy} + u_{yy} + 3u_x - e^x u_y + 27u = 23\sin(y-\pi)$,

c) $4u_{xx} - 4u_{xz} + 2u_{yy} + 4u_{zz} + x^2 u_x - 9yu_z + 4u = 0$.

Lösung:

a) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} - 3u_y + x^2 u = 1 \quad \Leftrightarrow$

$$\nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \nabla u + (0,-3)\nabla u + x^2 u = 1$$

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (1-\lambda)^2 - 1 = \lambda(\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = 2$$

Damit ist die Differentialgleichung in ganz $\mathbb{R}^2$ von parabolischem Typ.

b)
$$(y+2)u_{xx} + 4xu_{xy} + u_{yy} + 3u_x - e^x u_y + 27u = 23\sin(y-\pi)$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} y+2 & 2x \\ 2x & 1 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \nabla u + (3, -e^x - 2)\nabla u + 27u = 23\sin(y-\pi)$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \det \boldsymbol{A} = y + 2 - 4x^2 \begin{cases} > 0 & \text{(elliptisch)} & \text{für} \quad y > 4x^2 - 2 \\ = 0 & \text{(parabolisch)} & \text{für} \quad y = 4x^2 - 2 \\ < 0 & \text{(hyperbolisch)} & \text{für} \quad y < 4x^2 - 2 \end{cases}$$

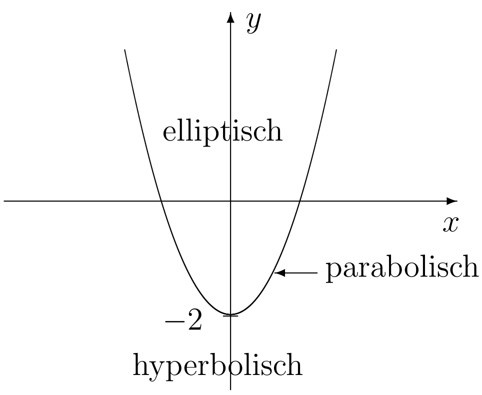

Bild 11 b) Gebiete unterschiedlichen Typs

c) $4u_{xx} - 4u_{xz} + 2u_{yy} + 4u_{zz} + x^2 u_x - 9yu_z + 4u = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \nabla u + (x^2, 0, -9y)\nabla u + 4u = 0$$

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (2-\lambda)((4-\lambda)^2 - 4) = (2-\lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 6) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 2\,, \quad \lambda_3 = 6$$

Damit ist die Differentialgleichung in ganz $\mathbb{R}^3$ von elliptischem Typ.

Transformation auf Normalform für konstante Matrizen $\boldsymbol{A}$

In einem ersten Koordinatentransformationsschritt wird die symmetrische und konstante Matrix $\boldsymbol{A}$ diagonalisiert. Im zweiten Schritt wird eine Koordinatenskalierung vorgenommen.

Darstellung einer Koordinatentransformation für $n = 2$:

$$\begin{array}{ccccc} D \subset \mathbb{R}^2 & \stackrel{\Phi}{\to} & \Phi(D) \subset \mathbb{R}^2 & \stackrel{\tilde{u}}{\to} & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \boldsymbol{\Phi}(x,y) = \begin{pmatrix} \xi(x,y) \\ \eta(x,y) \end{pmatrix} & \mapsto & \tilde{u}(\xi, \eta) \end{array}$$

Für $u := \tilde{u} \circ \boldsymbol{\Phi}$ erhält man $u(x,y) = \tilde{u}(\xi(x,y), \eta(x,y))$.

Mit $\quad \nabla^T = \left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}\right) \quad$ und $\quad \tilde{\nabla}^T = \left(\dfrac{\partial}{\partial \xi}, \dfrac{\partial}{\partial \eta}\right)$ erhält man nach der Kettenregel:

$$\nabla^T u = \boldsymbol{J}u = \boldsymbol{J}\tilde{u} \cdot \boldsymbol{J\Phi} = \tilde{\nabla}^T \tilde{u} \cdot \boldsymbol{J\Phi} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla u = (\boldsymbol{J\Phi})^T \tilde{\nabla} \tilde{u}\,.$$

Rein formal kann man also mit $\nabla = (\boldsymbol{J\Phi})^T \tilde{\nabla}$ rechnen.

Schritt 1:

Für die erste Koordinatentransformation nutzt man aus, dass sich eine symmetrische Matrix $\boldsymbol{A}$ durch eine orthogonale Matrizen $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$, wobei $\boldsymbol{v}_i$ die Eigenvektoren der Eigenwerte λ_i von $\boldsymbol{A}$ sind, auf Diagonalform $\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ transformieren lässt, d.h. es gilt $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{S}$:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}(x,y) := \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J\Phi} = \boldsymbol{S}^T \quad \Rightarrow \quad \nabla = \boldsymbol{S}\tilde{\nabla}\,.$$

Die Matrix-Vektorschreibweise der Differentialgleichung wird mit dieser Koordinatentransformation folgendermaßen transformiert:

$$\begin{aligned} & \nabla^T \boldsymbol{A} \nabla u + (d,e)\,\nabla u + fu = g \\ \Leftrightarrow \quad & \tilde{\nabla}^T \boldsymbol{S}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{S} \tilde{\nabla} \tilde{u} + (d,e)\,\boldsymbol{S}\tilde{\nabla}\tilde{u} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g} \\ \Leftrightarrow \quad & \tilde{\nabla}^T \boldsymbol{D} \tilde{\nabla} \tilde{u} + (d,e)\,\boldsymbol{S}\tilde{\nabla}\tilde{u} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g} \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 \tilde{u}_{\xi\xi} + \lambda_2 \tilde{u}_{\eta\eta} + \tilde{d}\tilde{u}_\xi + \tilde{e}\tilde{u}_\eta + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g} \end{aligned}$$

mit $\begin{pmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{e} \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$.

Im parabolischen Fall beispielweise mit $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 \neq 0$ (wegen $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$) ergibt sich dann mit $\tilde{d} \neq 0$ (Für $\tilde{d} = 0$ liegt eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung in der Variablen η vor.)

$$\tilde{u}_\xi = -\frac{\lambda_2}{\tilde{d}}\tilde{u}_{\eta\eta} - \frac{\tilde{e}}{\tilde{d}}\tilde{u}_\eta - \frac{\tilde{f}}{\tilde{d}}\tilde{u} + \frac{\tilde{g}}{\tilde{d}} .$$

bzw. nach Umbenennung in u mit den neuen Variablen (t, x) die **parabolische Normalform**

$$u_t = pu_{xx} + qu_x + ru + s .$$

Schritt 2:

Mit der zweiten Koordinatentransformation $\hat{u}(\mu, \nu) := \tilde{u}(\xi(\mu, \nu), \eta(\mu, \nu))$ bei elliptischem und hyperbolischem Typ werden für $\lambda_1 > 0$ die Faktoren λ_1 und λ_2 vor den zweiten Ableitungen auf ± 1 skaliert:

$$\begin{pmatrix} \mu \\ \nu \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \dfrac{\xi}{\sqrt{\lambda_1}} \\ \dfrac{\eta}{\sqrt{|\lambda_2|}} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1}\mu \\ \sqrt{|\lambda_2|}\nu \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{u}_\xi = \frac{\hat{u}_\mu}{\sqrt{\lambda_1}} , \quad \tilde{u}_\eta = \frac{\hat{u}_\nu}{\sqrt{|\lambda_2|}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{u}_{\xi\xi} = \frac{\hat{u}_{\mu\mu}}{\lambda_1} , \quad \tilde{u}_{\eta\eta} = \frac{\hat{u}_{\nu\nu}}{|\lambda_2|} .$$

Nach Transformation und Umbenennung in u mit den (neuen) Variablen (x, y) lautet die **elliptische Normalform**

$$u_{xx} + u_{yy} = pu_x + qu_y + ru + s ,$$

bzw. für u in den Variablen (t, x) die **1. hyperbolische Normalform**

$$u_{tt} - u_{xx} = pu_t + qu_x + ru + s .$$

Aufgabe 12:

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{17}{10}u_{xx} - \frac{9}{5}u_{xy} - \frac{7}{10}u_{yy} + \sqrt{10}u_x = x + 3y\,.$$

a) Man bestimme den Typ der Gleichung und

b) transformiere sie auf Normalform.

Lösung:

a)
$$\frac{17}{10}u_{xx} - \frac{9}{5}u_{xy} - \frac{7}{10}u_{yy} + \sqrt{10}u_x = x + 3y$$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla^T \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{17}{10} & -\frac{9}{10} \\ -\frac{9}{10} & -\frac{7}{10} \end{pmatrix}}_{=:\boldsymbol{A}} \nabla u + (\sqrt{10}, 0)\nabla u = x + 3y$$

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = 2$$

Es handelt sich damit in ganz $\mathbb{R}^2$ um eine hyperbolische Differentialgleichung.

b) Eigenvektoren $\boldsymbol{v}_1$ und $\boldsymbol{v}_2$ von $\boldsymbol{A}$ und Transformationsmatrix $\boldsymbol{S}$:

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mit den neuen Variablen

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} := \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

wird die Ausgangsgleichung nach der Kettenregel transformiert und in eine Gleichung in $\tilde{u}(\xi,\eta) := u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ überführt:

$$-\tilde{u}_{\xi\xi} + 2\tilde{u}_{\eta\eta} + \tilde{u}_\xi + 3\tilde{u}_\eta = \sqrt{10}\xi\,.$$

Erneute Transformation mit den Variablen

$$\mu := \xi\,,\ \nu := \frac{\eta}{\sqrt{2}}$$

führt auf die 1. hyperbolische Normalform in $\hat{u}(\mu,\nu) := \tilde{u}(\xi(\mu,\nu), \eta(\mu,\nu))$

$$\hat{u}_{\nu\nu} - \hat{u}_{\mu\mu} + \hat{u}_\mu + \frac{3}{\sqrt{2}}\hat{u}_\nu = \sqrt{10}\mu\,.$$