Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Dr. K. Rothe ©

Differentialgleichungen II
für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 2

Partielle Differentialgleichungen 1.Ordnung

Homogene lineare partielle Differentialgleichungen 1.Ordnung

(Skript S.15+16)

DGl-Typ: $\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}) u_{x_i} = 0$

für $n = 2$: $\quad a_1(x,y)u_x + a_2(x,y)u_y = 0$

für $n = 3$: $\quad a_1(x,y,z)u_x + a_2(x,y,z)u_y + a_3(x,y,z)u_z = 0$

Zugeordnete **charakteristische Differentialgleichungen**:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)^T$$

$$n = 2: \quad \begin{array}{l} \dot{x}(t) = a_1(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) = a_2(x(t), y(t)) \end{array} \quad ; \qquad n = 3: \quad \begin{array}{l} \dot{x}(t) = a_1(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{y}(t) = a_2(x(t), y(t), z(t)) \\ \dot{z}(t) = a_3(x(t), y(t), z(t)) \end{array}$$

Häufig vereinfacht sich das Lösen dieses i.Allg. nichtlinearen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, wenn man durch einen von Null verschiedenen Koeffizienten a_i teilt und dann zu den sogenannten **Phasendifferentialgleichungen** übergeht.

Für $n = 2$ und $a_1 \neq 0$ erhält man dann

$$\dot{x}(t) = 1 \, , \quad \dot{y}(t) = \frac{a_2(x(t), y(t))}{a_1(x(t), y(t))}$$

Lösen der Phasendifferentialgleichungen:

$$\dot{x}(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad x(t) = t + C_0.$$

Durch die Parametrisierungsforderung $x(0) = 0$ wird $C_0 = 0$ festgelegt und man kann x mit t identifizieren, es gilt also $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx}$.

Es verbleibt das Lösen von $\quad y'(x) = \dfrac{a_2(x, y(x))}{a_1(x, y(x))}$.

Die allgemeine Lösung sei jetzt gegeben durch $y = \psi(x, C)$. Durch Auflösen nach C erhält man dann die allgemeine Lösung für u durch

$$y = \psi(x, C) \quad \Rightarrow \quad C = \varphi(x, y) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \Phi(\underbrace{\varphi(x, y)}_{=C}) \, ,$$

mit einer beliebigen C^1-Funktion $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dieses u löst die Differentialgleichung, denn

$$0 = \frac{d}{dt}\Phi(C) = \frac{d}{dt}\Phi(\varphi(x(t), y(t))) = \Phi_\varphi \left(\varphi_x \dot{x} + \varphi_y \dot{y}\right) = \Phi_\varphi(\varphi_x a_1 + \varphi_y a_2) = a_1 \Phi_x + a_2 \Phi_y.$$

Für $n = 3$ und $a_1 \neq 0$ erhält man analog

$$\begin{matrix} y = \psi_1(x, C_1, C_2) \\ z = \psi_2(x, C_1, C_2) \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} C_1 = \varphi_1(x, y, z) \\ C_2 = \varphi_2(x, y, z) \end{matrix} \Rightarrow u(x, y, z) = \Phi(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)) \, ,$$

mit einer beliebigen C^1-Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 5: (Skript S.17+18)

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

$$(2x - y)u_x + yu_y = 0 \, .$$

Lösung:

Hier werden drei alternative Möglichkeiten des Lösens der charakteristischen Differentialgleichungen dargestellt:

a) Lösen mit Phasendifferentialgleichung:

$$(2x - y)u_x + yu_y = 0 \quad \overset{y \neq 0}{\Leftrightarrow} \quad \frac{2x - y}{y} u_x + \ u_y = 0$$

Die zweite charakteristische Differentialgleichung lautet jetzt

$$\dot{y}(t) = 1 \, .$$

Man erhält $y = t + C_0$, d.h. y und t sind bis auf Verschiebung um C_0 identisch. Für die weitere Lösung wählen wir $C_0 = 0$, also $y = t$ und berechnen $x = x(y)$.

Damit lautet die Phasendifferentialgleichung

$$x' = \frac{2x - y}{y} = \frac{2x}{y} - 1 \, .$$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung wird gelöst durch Separation

$$x'(y) = \frac{2x}{y} \quad \Rightarrow \quad \frac{x'}{x} = \frac{2}{y} \quad \Rightarrow \quad x_h(y) = C_1 y^2 \, .$$

Eine Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung erhält man durch Variation der Konstanten mit dem Ansatz

$$x_p(y) = C(y)y^2 \quad \Rightarrow \quad C'(y)y^2 = -1 \quad \Rightarrow \quad C(y) = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad x_p(y) = y \, .$$

Man erhält über die allgemeine Lösung:

$$x(y) = C_1 y^2 + y \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{x - y}{y^2} \, .$$

b) Die charakteristischen Differentialgleichungen

$$(2x-y)u_x + yu_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 2x - y\,, \quad \dot{y} = y\,.$$

Elementares Lösen des charakteristischen Differentialgleichungssystems:

$\dot{y} = y \;\Rightarrow\; y(t) = c_1 e^t \;\Rightarrow\; e^t = \dfrac{y}{c_1}$

$\dot{x} = 2x - y = 2x - c_1 e^t$ ist eine lineare inhomogene Differentialgleichung.

Allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung:

$$x_h(t) = c_2 e^{2t}\,.$$

Variation der Konstanten für die inhomogene Differentialgleichung: $x_p(t) = c(t)e^{2t}$:

$$\dot{c}e^{2t} = -c_1 e^t \quad \Rightarrow \quad \dot{c} = -c_1 e^{-t} \quad \Rightarrow \quad c(t) = c_1 e^{-t}$$

Allgemeine Lösung: $x(t) = c_2 e^{2t} + c_1 e^t$. Damit ergibt sich

$$x = c_2 \left(\frac{y}{c_1}\right)^2 + y \quad \Rightarrow \quad \frac{c_2}{c_1^2} = \frac{x-y}{y^2} \qquad \left(\text{mit } C_1 = \frac{c_2}{c_1^2}\,,\ \text{vgl. a)}\right).$$

c) Lösen der charakteristischen Differentialgleichungen als lineares System mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

$$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (2-\lambda)(1-\lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = 2$$

Man berechnet die zugehörigen Eigenvektoren:

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Allgemeine Lösung des Systems:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 \boldsymbol{v}_1 e^t + c_2 \boldsymbol{v}_2 e^{2t} = \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ c_1 e^t \end{pmatrix} \qquad \text{(vgl. b))}$$

Man erhält somit die allgemeine Lösung der Ausgangsgleichung:

$$u(x,y) = \Phi\left(\frac{x-y}{y^2}\right)$$

mit einer beliebigen C^1-Funktion Φ.

Aufgabe 6: (Skript S.17+18)

Man bestimme die allgemeine Lösung der folgenden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$4xu_x - 12xyu_y - x^2z^2u_z = 0 \, .$$

Lösung:

Normiert man einen Koeffizienten in der Differentialgleichung auf eins

$$4xu_x - 12xyu_y - x^2z^2u_z = 0 \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} u_x - 3yu_y - \frac{xz^2}{4}u_z = 0 \, ,$$

so kann man die charakteristischen Differentialgleichungen um eine Gleichung reduzieren und nennt sie dann Phasendifferentialgleichungen:

$$\dot{x} = 1 \, , \quad \dot{y} = -3y \, , \quad \dot{z} = -\frac{xz^2}{4} \, .$$

$\dot{x} = 1 \;\Rightarrow\; x = t + C_0$, d.h. x und t stimmen bis auf Verschiebung um C_0 überein. Ohne Einschränkung kann $C_0 = 0$ gewählt werden, also $x = t$.

Lösen der Phasendifferentialgleichung:

$y' = -3y \;\Rightarrow\; y(x) = C_1 e^{-3x}$

$\Rightarrow\; C_1 = ye^{3x} =: \varphi_1(x, y, z)$

$z' = -\dfrac{xz^2}{4} \;\Rightarrow\; -\dfrac{z'}{z^2} = \dfrac{x}{4} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{z} = \dfrac{x^2}{8} + C_2$

$\Rightarrow\; C_2 = \dfrac{1}{z} - \dfrac{x^2}{8} =: \varphi_2(x, y, z) \, .$

Damit lautet die allgemeine Lösung mit einer beliebigen C^1-Funktion Φ:

$$u(x, y, z) = \Phi\left(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)\right) = \Phi\left(ye^{3x}, \frac{1}{z} - \frac{x^2}{8}\right) \, .$$

Anfangswertaufgaben (vgl. auch Skript S.23)

Bei homogenen **linearen** partiellen Differentialgleichungen 1.Ordnung kann man (erklärt am Beispiel $n = 2$) die beliebige C^1-Funktion $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in der allgemeinen Lösung

$$u(x, y) = \Phi(\varphi(x, y))$$

durch Vorgabe einer **'Anfangsfunktion'**

$$u_0(s) := u(x(s), y(s))$$

auf einer Kurve $\mathbf{c}(s) := (x(s), y(s))^T$ versuchen eindeutig festzulegen, durch

$$u_0(s) = \Phi(\varphi(x(s), y(s)) \, .$$

Probleme treten auf, wenn $\mathbf{c}(s)$ mit einer Charakteristik übereinstimmt.

Beispiele für spezielle Anfangskurven:

$$\mathbf{c}(x) = (x, 0)^T \, , \mathbf{c}(x) = (x, \gamma(x))^T, \quad \mathbf{c}(y) = (0, y)^T, \ \mathbf{c}(y) = (\gamma(y), y)^T \, .$$

Aufgabe 7: (Skript S.17+18, vgl. auch S.23)

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$u_x + 2u_y = 0 \quad \text{mit} \quad u(x, 3x) = x^3 + x\,.$$

Lösung:

charakteristische Differentialgleichungen

$\dot{x} = 1\,, \quad \dot{y} = 2$

$\dot{x} = 1 \quad \Rightarrow \quad x = t$

$y'(x) = 2 \;\Rightarrow\; y = 2x + C \;\Rightarrow\; C = y - 2x$

allgemeine Lösung $\quad u(x, y) = \psi\,(y - 2x)$

Anfangsbedingung $\quad x^3 + x = u(x, 3x) = \psi\,(3x - 2x) = \psi\,(x)$

Lösung der Anfangswertaufgabe $\quad u(x, y) = (y - 2x)^3 + (y - 2x)$

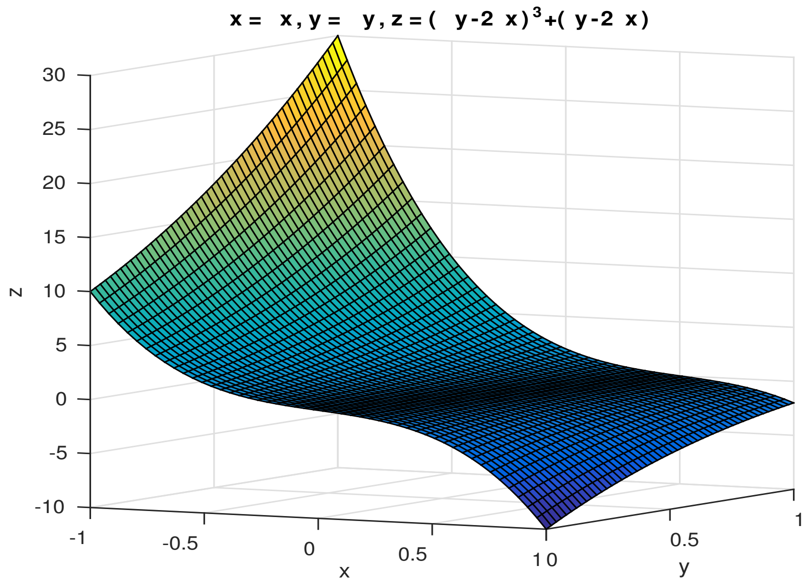

Bild 7: Lösung $u(x, y)$

Quasilineare partielle Differentialgleichungen 1.Ordnung (Skript S.19-22)

DGl-Typ: $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}, u)u_{x_i} = b(\boldsymbol{x}, u)$

Dieser quasilinearen inhomogenen Differentialgleichung in $u(\boldsymbol{x})$ wird folgende erweiterte quasilineare homogene Differentialgleichung in $U(\boldsymbol{x}, u)$ zugeordnet

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x}, u)U_{x_i}\right) + b(\boldsymbol{x}, u)U_u = 0\ .$$

Dann wird das vorhergehende Verfahren mit den charakteristischen Differentialgleichungen angewendet. Insbesondere können auf diese Weise auch lineare inhomogene partielle Differentialgleichungen 1.Ordnung also

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\boldsymbol{x})u_{x_i} = b(\boldsymbol{x})$$

behandelt werden.

Für $n = 2$ erhält man: $a_1(x, y, u)U_x + a_2(x, y, u)U_y + b(x, y, u)U_u = 0,$

zugeordnete charakteristische Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= a_1(x(t), y(t), u(t)) \\ \dot{y}(t) &= a_2(x(t), y(t), u(t)) \\ \dot{u}(t) &= b(x(t), y(t), u(t)) \end{aligned}$$

verbleibende Phasendifferentialgleichungen, falls $a_1 \neq 0$, d.h. $x = t$:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{a_2(x, y(x), u(x))}{a_1(x, y(x), u(x))} \\ u'(x) &= \frac{b(x, y(x), u(x))}{a_1(x, y(x), u(x))} \end{aligned}$$

Aus der allgemeinen Lösung dieser Differentialgleichungen ergibt sich eine implizite Lösungsdarstellung für $u = u(x, y)$:

$$\begin{array}{l} y = \psi_1(x, C_1, C_2) \\ u = \psi_2(x, C_1, C_2) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} C_1 = \varphi_1(x, y, u) \\ C_2 = \varphi_2(x, y, u) \end{array} \Rightarrow \Phi(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)) = 0\ ,$$

mit einer beliebigen C^1-Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Bei der Lösung von Anfangswertaufgaben **quasilinearer** partieller Differentialgleichungen 1.Ordnung (erklärt am Beispiel $n = 2$) geht man analog zum linearen homogenen Fall vor:

Vorgabe der **'Anfangsdaten'** durch Wahl von

$$\boldsymbol{v}(s) := (x(s), y(s), u_0(s))\ .$$

Probleme treten wiederum auf, wenn $\boldsymbol{v}(s)$ so gewählt wird, dass $((x(s), y(s))$ mit den x, y-Komponenten der Charakteristiken übereinstimmen.

Einsetzen von $\boldsymbol{v}(s)$ in die implizite Lösungsdarstellung

$$\Phi(\varphi_1(x(s), y(s), u_0(s)), \varphi_2(x(s), y(s), u_0(s))) = 0$$

und bestimmen der Funktion Φ. Anschließend wird dann die Gleichung $\Phi(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)) = 0$ nach u aufgelöst. (Annahme: Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen seien erfüllt).

Bei der Bestimmung von Φ kann es von Vorteil sein, wenn man vor dem Einsetzen von v zunächst nach einer Komponente auflöst:

$$\Phi(\varphi_1(x, y, u), \varphi_2(x, y, u)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_1(x, y, u) = \xi(\varphi_2(x, y, u)) \ ,$$

$\boldsymbol{v}$ einsetzt und dann die unbekannte Funktion ξ bestimmt.

Ein besonders günstiger Fall tritt ein, wenn beispielsweise φ_2 nicht von u abhängt, d.h. $\varphi_2(x, y, u) = \varphi_2(x, y)$ gilt. Dann kann man versuchen weiteraufzulösen

$$\varphi_1(x, y, u) = \xi(\varphi_2(x, y)) \quad \Rightarrow \quad u(x, y) = \psi(\varphi_2(x, y))$$

und durch Einsetzen der Anfangsdaten die unbekannte Funktion ψ bestimmen

$$u_0(s) = u(x(s), y(s)) = \psi(\varphi_2(x(s), y(s))) \quad \Rightarrow \quad \psi(s) \ .$$

Aufgabe 8: (Skript S. 21+22)

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$xu_x + (x+2y)u_y = 3u - 2x \quad \text{mit} \quad u(2x,2x) = 2x + 8x^2$$

unter Verwendung der Charakteristikenmethode.

Lösung:

Der inhomogenen linearen PDG 1.Ordnung in den Variablen (x,y) wird das erweiterte Problem in den Variablen (x,y,u) zugeordnet:

$$xU_x + (x+2y)U_y + (3u-2x)U_u = 0\,.$$

Für dieses Problem werden die charakteristischen Differentialgleichungen gelöst

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x \\ \dot{y}(t) &= x + 2y \\ \dot{u}(t) &= 3u - 2x \end{aligned}$$

a) kurzer Lösungsweg

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= x && \Rightarrow\; x(t) = C_1e^t \\ \dot{y}(t) &= x + 2y = 2y + C_1e^t && \Rightarrow\; y(t) = C_2e^{2t} - C_1e^t \\ \dot{u}(t) &= 3u - 2x = 3u - 2C_1e^t && \Rightarrow\; u(t) = C_3e^{3t} + C_1e^t \end{aligned}$$

b) Standardlösungsmethode für lineare Systeme mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{u}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=\boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ u(t) \end{pmatrix}$$

$p_{\boldsymbol{A}}(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) = 0$

Eigenwerte: $\lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = 2\,,\ \lambda_3 = 3$

Eigenvektoren: $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\,,\ \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\ \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Allgemeine Lösung des (homogenen) Systems:

$$\boldsymbol{v}_h(t) = C_1e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Elimination von t durch $x(t) = C_1 e^t \Rightarrow e^t = \dfrac{x}{C_1}$ und anschließendes Auflösen nach den Konstanten

$$y = y(t) = C_2 e^{2t} - C_1 e^t = \left(\frac{C_2 x^2}{C_1^2}\right) - x \quad \Rightarrow \quad \tilde{C}_2 := \frac{C_2}{C_1^2} = \frac{x+y}{x^2}$$

$$u = C_3 e^{3t} + C_1 e^t = \left(\frac{C_3 x^3}{C_1^3}\right) + x \quad \Rightarrow \quad \tilde{C}_3 := \frac{C_3}{C_1^3} = \frac{u-x}{x^3}$$

Damit wird die Lösung u beschrieben durch folgende implizite Gleichung:

$$U(x,y,u) = \Phi(\tilde{C}_2, \tilde{C}_3) = \Phi\left(\frac{x+y}{x^2}, \frac{u-x}{x^3}\right) = 0$$

Setzt man die Auflösbarkeit nach der 2. Variablen von Φ voraus, so ergibt sich die allgemeine Lösung mit einer noch frei wählbaren Funktion Ψ:

$$\frac{u-x}{x^3} = \Psi\left(\frac{x+y}{x^2}\right) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = x + x^3 \Psi\left(\frac{x+y}{x^2}\right)$$

Durch Einsetzen der Anfangsbedingung wird Ψ bestimmt:

$$2x + 8x^2 = u(2x, 2x) = 2x + 8x^3 \Psi\left(\frac{4x}{4x^2}\right) \Rightarrow \Psi\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \Rightarrow \Psi(x) = x\ .$$

Daraus erhält man die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$u(x,y) = x + x^3 \frac{x+y}{x^2} = x + x^2 + xy\ .$$