Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2020**
Dr. K. Rothe ©

Differentialgleichungen II

für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Hörsaalübung mit Beispielaufgaben zu Blatt 1

Die Hörsaalübung wird online durchgeführt

https://e-learning.tuhh.de/studip/dispatch.php/start

unter STUDIP am Freitag 24.04., 11:30-13:00

Bearbeitung von Blatt 1 in KW 18 (ab 27.04.)

Partielle Differentialgleichungen

Ein Gleichungssystem der Form

$$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^p \boldsymbol{u}}{\partial^p x_1}, \dots, \frac{\partial^p \boldsymbol{u}}{\partial^p x_n}\right) = \boldsymbol{0}$$

mit $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ und

$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = (u_1(x_1, \dots, x_n), \dots, u_m(x_1, \dots, x_n))^T$ heißt **partielle Differentialgleichung** der **Ordnung** p.

Typen partieller Differentialgleichungen (Skript: Seiten 4-7)

- **linear** (vektoriell, Ordnung p)

  $$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a}_0(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a}_{1,0,\dots,0}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}{\partial x_1} + \dots + \boldsymbol{a}_{0,\dots,0,1}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}{\partial x_n} + \dots$$
  $$+\boldsymbol{a}_{p,0,\dots,0}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial^p \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}{\partial^p x_1} + \dots + \boldsymbol{a}_{0,\dots,0,p}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial^p \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})}{\partial^p x_n} = \boldsymbol{0}$$

  Beispiel: $u = u(x, y)$, d.h. u skalar mit zwei Variablen x und y

  $$\begin{aligned} 0 &= f(x,y) + a_0(x,y)u + a_{1,0}(x,y)u_x + a_{0,1}(x,y)u_y \\ &\quad + a_{2,0}(x,y)u_{xx} + a_{1,1}(x,y)u_{xy} + a_{0,2}(x,y)u_{yy} \end{aligned}$$

- **semilinear** (vektoriell, Ordnung p)

  $$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \boldsymbol{u}}{\partial^{p-1} x_1}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \boldsymbol{u}}{\partial^{p-1} x_n}\right)$$
  $$+\boldsymbol{a}_{p,0,\dots,0}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial^p \boldsymbol{u}}{\partial^p x_1} + \dots + \boldsymbol{a}_{0,\dots,0,p}(\boldsymbol{x}) \cdot \frac{\partial^p \boldsymbol{u}}{\partial^p x_n} = \boldsymbol{0}$$

  Beispiel: $u = u(x, y)$

  $0 = f(x,y,u,u_x,u_y) + a_{2,0}(x,y)u_{xx} + a_{1,1}(x,y)u_{xy} + a_{0,2}(x,y)u_{yy}$

- **quasilinear** (vektoriell, Ordnung p)

  $$\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \boldsymbol{u}}{\partial^{p-1} x_1}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \boldsymbol{u}}{\partial^{p-1} x_n}\right)$$
  $$+\boldsymbol{a}_{p,0,\dots,0}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \boldsymbol{u}}{\partial^{p-1} x_1}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \boldsymbol{u}}{\partial^{p-1} x_n}\right) \cdot \frac{\partial^p \boldsymbol{u}}{\partial^p x_1} + \dots$$
  $$+\boldsymbol{a}_{0,\dots,0,p}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial x_n}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \boldsymbol{u}}{\partial^{p-1} x_1}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \boldsymbol{u}}{\partial^{p-1} x_n}\right) \cdot \frac{\partial^p \boldsymbol{u}}{\partial^p x_n} = \boldsymbol{0}$$

  Beispiel: $u = u(x, y)$

  $0 = f(x,y,u,u_x,u_y) + a_{2,0}(x,y,u,u_x,u_y)u_{xx} + a_{1,1}(x,y,u,u_x,u_y)u_{xy} + a_{0,2}(x,y,u,u_x,u_y)u_{yy}$

- In den übrigen Fällen ist die partielle Differentialgleichung **nichtlinear**.

Eine Funktion u heißt **harmonisch**, wenn $\Delta u = 0$ gilt.

Aufgabe 1:

a) Man bestimme den Typ der folgenden partiellen Differentialgleichungen:

(i) $u_x + u^2 u_y = 3x + 4y - 6u + 5,$

(ii) $u_{xy} + y^2 u_y^2 = e^u + x^2 + y^2,$

(iii) $u_{xx}^2 + x^2 u_{yy} = 1 + 2x + 3y + 4u + 5u_x + 6u_y,$

(iv) $\ln(u_x + u_y) + u_x + u_y = 1,$

(v) $\begin{pmatrix} xu_x \\ xv_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -u_y \end{pmatrix}.$

b) Man zeige, dass folgende Funktionen harmonisch sind:

(i) $u_1(x, y) = x^3 - 3xy^2$

(ii) $u_2(x, y) = 3x^2 y - y^3$

(iii) $u_3(x, y) = \mathrm{Im}(e^z + z) + 6\mathrm{Re}(z)$ mit $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

Lösung:

a) (i) $u_x + u^2 u_y = 3x + 4y - 6u + 5,$ skalar, quasilinear, 1. Ordnung

(ii) $u_{xy} + y^2 u_y^2 = e^u + x^2 + y^2,$ skalar, semilinear, 2. Ordnung

(iii) $u_{xx}^2 + x^2 u_{yy} = 1 + 2x + 3y + 4u + 5u_x + 6u_y,$
skalar, nichtlinear, 2. Ordnung

(iv) $\ln(u_x + u_y) + u_x + u_y = 1,$ skalar, nichtlinear, 1. Ordnung,

(v) $\begin{pmatrix} xu_x \\ xv_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \\ -u_y \end{pmatrix}$, vektoriell, linear, 1. Odnung

b) (i) $\Delta u_1 = (x^3 - 3xy^2)_{xx} + (x^3 - 3xy^2)_{yy} = 6x - 6x = 0$

(ii) $\Delta u_2 = (3x^2 y - y^3)_{xx} + (3x^2 y - y^3)_{yy} = 6y - 6y = 0$

(iii) $\Delta u_3 = (e^x \sin(y) + y + 6x)_{xx} + (e^x \sin(y) + y + 6x)_{yy}$
$= e^x \sin(y) - e^x \sin(y) = 0$.

Aufgabe 2:

Man löse folgende Differentialgleichungen

a) $u_{yy} - 4xu_y + 3x^2u = -8x + 3x^3 + 6x^2y,$

b) $u_{xy} = 2x\cos y + e^x + 3y^2,$

c) $x(x+1)u_{xy} = (2x+1)u_y.$

Lösung:

a) Fasst man x als Parameter auf, so kann diese partielle Differentialgleichung als gewöhnliche Differentialgleichung aufgefasst werden in $v(y) := u(x,y)$:

$$v'' - 4xv' + 3x^2v = -8x + 3x^3 + 6x^2y\ .$$

Lösung der homogenen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v'' - 4xv' + 3x^2v = 0$$

mit dem üblichen Ansatz $v(y) = e^{\lambda y}$, dabei kann λ von x abhängen, also $\lambda = \lambda(x)$ gelten.

$p(\lambda) = \lambda^2 - 4x\lambda + 3x^2 = (\lambda - 2x)^2 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2x \pm x$

$\Rightarrow \quad v_h(y) = c_1(x)e^{3xy} + c_2(x)e^{xy}$

mit frei wählbaren stetigen Funktionen $c_1(x)$ und $c_2(x)$.

Lösung der inhomogenen gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v'' - 4xv' + 3x^2v = -8x + 3x^3 + 6x^2y$$

mit dem üblichen Ansatz $v_p(y) = a(x)y + b(x)$:

$v'' - 4xv' + 3x^2v = -4xa + 3x^2(ay + b)$

$= 3x^2ay - 4ax + 3x^2b = -8x + 3x^3 + 6x^2y$

$\Rightarrow\ a = 2\ \Rightarrow\ b = x \quad \Rightarrow \quad v_p(y) = 2y + x$

$\Rightarrow \quad u(x,y) = v_h(y) + v_p(y) = c_1(x)e^{3xy} + c_2(x)e^{xy} + 2y + x$

b) $u_{xy} = 2x\cos y + e^x + 3y^2 \quad \Rightarrow \quad u_x = 2x\sin y + ye^x + y^3 + c(x)$

$\Rightarrow \quad u(x,y) = x^2\sin y + ye^x + xy^3 + f(x) + g(y)$

mit beliebigen und differenzierbaren Funktion g und f, wobei $f'(x) = c(x)$ gilt.

c) Setze $v(x,y) := u_y(x,y)$, dann erhält man:

$x(x+1)u_{xy} = (2x+1)u_y$

$\Rightarrow \quad v_x = \dfrac{2x+1}{x^2+x}v \quad \Rightarrow \quad \dfrac{v_x}{v} = \dfrac{2x+1}{x^2+x}$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v} = \int \frac{2x+1}{x^2+x} dx \quad \Rightarrow \quad \ln|v| = \ln|x^2+x| + k(y)$$

$$\Rightarrow \quad u_y = v = c(y) \cdot (x^2+x) \quad \Rightarrow \quad u(x,y) = g(y) \cdot (x^2+x) + f(x)$$

mit beliebigen und differenzierbaren Funktion f und g, wobei $g'(y) = c(y)$ gilt.

Aufgabe 3:

Man berechne mit Hilfe von Exponentialansätzen reelle Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

a) $u(t,x) = e^{x+\alpha t}$ für $u_{tt} = 9u_{xx}$,

b) $u(x,y,z) = e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}$ für $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_z + u = 0$.

Lösung:

a) $u(t,x) = e^{x+\alpha t}$ eingesetzt $u_{tt} = 9u_{xx}$ ergibt

$$\alpha^2 e^{x+\alpha t} = 9e^{x+\alpha t} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm 3 .$$

Lösungen der Differentialgleichungen sind also

$$f(x,t) = e^{x+3t} \quad \text{und} \quad f(x,t) = e^{x-3t} .$$

b) $u(x,y,z) = e^{\alpha x+\beta y+\gamma z}$

$\Rightarrow \quad u_{xx} = \alpha^2 u\,, \quad u_{yy} = \beta^2 u\,, \quad u_{zz} = \gamma^2 u$

In die Differentialgleichung einsetzen:

$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - 2u_z + u = 0$

$\Rightarrow \quad \alpha^2 u + \beta^2 u + \gamma^2 u - 2\gamma u + u = 0$

$\overset{u\neq 0}{\Rightarrow} \quad \alpha^2 + \beta^2 + (\gamma-1)^2 = 0$

$\Rightarrow \quad \gamma = 1 \pm i\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} u_1(x,y,z) = e^{\alpha x+\beta y+z}\cos(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)\,, \\ u_2(x,y,z) = e^{\alpha x+\beta y+z}\sin(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}z)\,. \end{array}$$

Aufgabe 4:

Man löse die Anfangswertaufgabe

$$2v_t + 5v_x = 12tx + 15t^2 \,, \quad v(0,x) = \cos(2x)$$

und zeichne die Lösung.

Hinweis: Durch eine geeignete lineare Transformation

$$\begin{aligned} r &= at + bx \\ s &= ct + dx \end{aligned}$$

mit $ad - bc \neq 0$ transformiere man die Differentialgleichung auf eine gewöhnliche Differentialgleichung.

Lösung:

Mit $v(t,x) = w(r(t,x), s(t,x))$ transformieren sich die partiellen Ableitungen in der Differentialgleichung nach der Kettenregel

$$v_t = w_r r_t + w_s s_t \,, \quad v_x = w_r r_x + w_s s_x \,,$$

mit $r_t = a$, $s_t = c$, $r_x = b$ und $s_x = d$. Eingesetzt in die Differentialgleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} 12tx + 15t^2 &= 2(w_r r_t + w_s s_t) + 5(w_r r_x + w_s s_x) \\ &= w_r(2r_t + 5r_x) + w_s(2s_t + 5s_x) \\ &= w_r(2a + 5b) + w_s(2c + 5d) \,. \end{aligned}$$

Durch geschickte Wahl der noch unbestimmten Koeffizienten a, b, c und d der linearen Transformation kann man einen Koeffizienten der transformierten Differentialgleichung gleich Null setzten und den anderen eindeutig festlegen unter Berücksichtigung von $ad - bc \neq 0$ (reguläre Transformation). Beispielsweise führt die Wahl

$$a = 5,\ b = -2,\ c = 0,\ d = 1/5 \ \Rightarrow \quad \begin{aligned} r &= 5t - 2x \\ s &= x/5 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= r/5 + 2s \\ x &= 5s \end{aligned}$$

auf die transformierte Differentialgleichung

$$w_s(r,s) = 12(r/5 + 2s)5s + 15(r/5 + 2s)^2 = \frac{3}{5}(r^2 + 40rs + 300s^2) \,.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung in der Variablen s mit dem Parameter r. Integration bezüglich s führt auf die Lösung

$$\begin{aligned} w(r,s) &= \frac{3}{5}(r^2 s + 20rs^2 + 100s^3) + f(r) \\ \Rightarrow \quad v(t,x) &= \frac{3}{5}\left((5t-2x)^2\frac{x}{5} + 20(5t-2x)\left(\frac{x}{5}\right)^2 + 100\left(\frac{x}{5}\right)^3\right) + f(5t-2x) \\ &= 3t^2 x + f(5t - 2x) \end{aligned}$$

Die Anfangsvorgabe wird verwendet, um die noch unbestimmte Funktion f festzulegen

$$v(0,x) = f(-2x) = \cos(2x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = \cos x \,.$$

Damit lautet die Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$v(t,x) = 3t^2x + \cos(5t - 2x) \,.$$

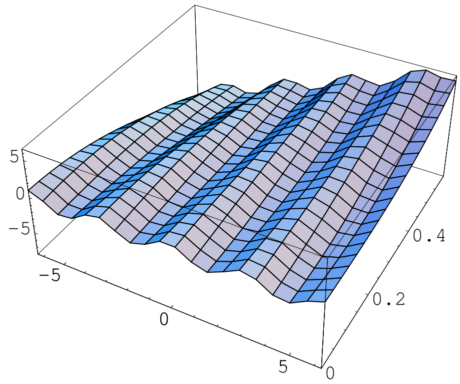

Bild 4: $v(t,x) = 3t^2x + \cos(5t - 2x)$ für $0 \leq t \leq 0.6$ und $-2\pi \leq x \leq 2\pi$