Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Prof. Dr. Timo Reis
Fachbereich Mathematik, Universität Hamburg

Technische Universität Hamburg-Harburg
Sommersemester 2019

nach Vorlage von Prof. Dr. Jens Struckmeier (SoSe 2007)

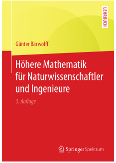
Allgemeine Informationen

Informationsquellen

- https://www.math.uni-hamburg.de/teaching/export/tuhh/cm/d2/19/lm.html
- **Vorlesung** (wöchentlich, ab Dienstag 2.4.2019)
  Dienstag, 12:30-14:00 in DE22 Raum Audimax2
- **Übungen in Tutorgruppen** (14-täglich, ab Montag 15.4.2019, Anmeldung im Intranet der TU)
  Dr. Hanna Peywand Kiani und ÜbungsgruppenleiterInnen
- **Hörsaalübungen** (14-täglich, ab Freitag 12.4.2019)
  Freitag, 11:30–13:00 Uhr, H0.016
  Dr. Hanna Peywand Kiani.
- **Sprechstunde Prof. Reis**
  Montag, E 3.079, 13:30–14:30

Literatur

G. Bärwolff: **Höhere Mathematik für Naturwissenschaftler und Ingenieure**,
3. Auflage. Springer 2017
`http://www.springer.com/de/book/9783662550212`



R. Ansorge, H. J. Oberle: **Mathematik für Ingenieure 2**,
3. Auflage. WILEY-VCH, 2011.

K. Burg, H. Haf, F. Wille, A. Meister: **Partielle Differentialgleichungen und funktionalanalytische Grundlagen**,
Springer, 2009
`https://www.springer.com/de/book/9783834895899`

Inhalt der Differentialgleichungen II

1. Einführung
2. partielle Differentialgleichungen erster Ordnung
3. partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung
4. Laplace-Gleichung
5. Wärmeleitungsgleichung
6. Wellengleichung
7. Fourier-Methoden
8. Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen

Einführung

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Definition

Eine Gleichung bzw. ein Gleichungssystem der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}\right) = 0$$

für eine gesuchte Funktion $\mathbf{u} : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ heißt ein System partieller Differentialgleichungen (PDE) für die m Funktionen $u_1(\mathbf{x}), \ldots, u_m(\mathbf{x})$.

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Definition (cont.)

Tritt eine der partiellen Ableitungen p–ter Ordnung $\dfrac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}}$ explizit auf, so spricht man von einer partiellen DGL der Ordnung p.

Typischerweise treten in Anwendungen (Systeme) partielle(r) Differentialgleichungen erster und zweiter Ordnung auf.

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Definition (cont.)

- Eine PDE heißt linear, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin–linear in den Variablen $\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist.
- Eine PDE heißt semilinear, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin–linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist und die Koeffizienten nur von $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ abhängen.
- Eine PDE heißt quasilinear, falls $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots)$ affin–linear in den Variablen $\frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_n^p}$ ist. Die Koeffizienten können dann von $\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial^{p-1} \mathbf{u}}{\partial x_n^{p-1}}\right)$ abhängen.
- In allen anderen Fällen ist die PDE nichtlinear.

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Beispiele

- skalare lineare PDE erster Ordnung in zwei Variablen

$$a_1(x,y)u_x + a_2(x,y)u_y + b(x,y)u = c(x,y)$$

- skalare quasilineare PDE erster Ordnung in zwei Variablen

$$a_1(x,y,u)u_x + a_2(x,y,u)u_y = g(x,y,u)$$

- semilineare PDE (System) zweiter Ordnung in n Variablen

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,\dots,x_n)\mathbf{u}_{x_i x_j} = b(x_1,\dots,x_n,\mathbf{u},\mathbf{u}_{x_1},\dots,\mathbf{u}_{x_n})$$

- nichtlineare skalare PDE erster Ordnung in zwei Variablen

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = f(x,y,u,u_x \cdot u_y)$$

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Bemerkung

In Anwendungen treten typischerweise Ortsvariablen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ (oft $n = 3$) sowie die Zeitvariable $t \in \mathbb{R}$ auf.

Wir betrachten dann die allgemeine PDE der Form

$$\mathbf{F}\left(\mathbf{x}, t, \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^p}, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial x_1^{p-1} \partial x_2}, \dots, \frac{\partial^p \mathbf{u}}{\partial t^p}\right) = 0$$

in $(n + 1)$ Variablen. Differentialoperatoren wie etwa

$$\nabla \quad \mathrm{div} \quad \mathrm{rot} \quad \text{oder} \quad \Delta$$

beziehen sich dann stets auf die n Ortsvariablen, zum Beispiel

$$\mathrm{div} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}.$$

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Der Reynoldsche Transportsatz

Zur Zeit $t = 0$ nehme eine physikalische Größe (Ladung, Fluid etc.) die beschränkte und offene Menge $D_0 \subset \mathbb{R}^n$ ein. Die Funktion $\Phi(\mathbf{y}, t)$ beschreibe die Veränderung eines Punktes $\mathbf{y}_0 \in D_0$ in der Zeit

$$\Phi : D_0 \times [0, T] \to D_t \subset \mathbb{R}^n,$$

so dass

$$D_t := \{\Phi(\mathbf{y}, t) \ : \ \mathbf{y} \in D_0\}.$$

Die Trajektorie von $y \in D_0$ ist die Abbildung $t \to \Phi(y, t) \in D_T$ und

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(\mathbf{y}, t) =: \mathbf{v}(\Phi(\mathbf{y}, t), t)$$

bezeichne das Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}$ der physikalischen Größe.

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Der Reynoldsche Transportsatz

Für eine beliebige differenzierbare, skalare Funktion $f : D_t \times [0, T] \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\frac{d}{dt} \int\limits_{D_t} f(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = \int\limits_{D_t} \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}\left(f(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\right) d\mathbf{x}.$$

Beweisidee:

Sei $J(\mathbf{y}, t) = \det(D_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{y}, t))$ die Jacobi–Matrix von $\Phi(\mathbf{y}, t)$ bzgl. $\mathbf{y}$. Transformiere damit D_t auf D_0:

$$\int\limits_{D_t} f(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = \int\limits_{D_0} f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t)\, d\mathbf{y}.$$

Berechne dann die zeitliche Ableitung der rechten Seite

$$\tfrac{d}{dt} \int\limits_{D_0} f(\Phi(\mathbf{y}, t), t) J(\mathbf{y}, t)\, d\mathbf{y}$$

und transformiere zurück auf das zeitabhängige Gebiet D_t. $\square$

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Die Kontinuitätsgleichung

Sei $u(x,t)$ die Massendichte einer physikalischen Größe und es gelte ein Erhaltungsprinzip der Form

$$\frac{d}{dt}\int_{D_t} u(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} = 0.$$

Dann folgt aus dem Reynoldschen Transportsatz

$$\int_{D_t} \frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t) + \operatorname{div}\left(u(\mathbf{x},t)\mathbf{v}(\mathbf{x},t)\right)d\mathbf{x} = 0.$$

Da D_t eine beliebige Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ ist, folgt die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(\mathbf{x},t) + \operatorname{div}\left(u\mathbf{v}\right)(\mathbf{x},t) = 0.$$

Diese wichtige Gleichung wird als Kontinuitätsgleichung bezeichnet.

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Die Flachwassergleichung

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Die Flachwassergleichung

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Die Flachwassergleichung

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Die Flachwassergleichung

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Die Flachwassergleichung

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Die Kontinuitätsgleichung

Wir schreiben die Kontinuitätsgleichung mit Hilfe der Flußfunktion $q(\mathbf{x}, t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) + \operatorname{div}\left(\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)\right) = 0.$$

Eine Gleichung für zwei unbekannte Funktionen $u(\mathbf{x}, t)$ und $\mathbf{q}(\mathbf{x}, t)$?

Deshalb: Modellierungsansatz

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) := \mathbf{q}(u(\mathbf{x}, t), \nabla u(\mathbf{x}, t), \dots)$$

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Einfachstes Beispiel

Der Fluß **q** ist proportional zur Dichte u, i.e.

$$\mathbf{q}(x,t) := \mathbf{a} \cdot u(x,t), \qquad \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x},t) + \mathbf{a} \cdot \nabla u(x,t) = 0.$$

Man nennt diese Gleichung auch die Transportgleichung.

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Wärmeleitungs– oder Diffusionsgleichung

Die Dichte $u(x,t)$ beschreibe

- eine chemische Konzentration;
- die Temperatur;
- ein elektro–statisches Potential.

Physikalische Modellierung: der Fluß $\mathbf{q}$ ist proportional zum Gradienten der Dichte u, zeigt allerdings in die entgegengesetzte Richtung, i.e.

$$\mathbf{q}(x,t) := -a\nabla u(x,t), \qquad a > 0.$$

Daraus folgt

$$\tfrac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x},t) + \operatorname{div}\left(-a\nabla u(x,t)\right) = 0$$

und damit die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x},t) = a \cdot \Delta u(x,t).$$

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Wärmeleitungs– oder Diffusionsgleichung

Setzen wir $a = 1$, so erhalten wir die klassische Wärmeleitungsgleichung oder auch (lineare) Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = \Delta u(x, t).$$

Die Abschlußrelation

$$\mathbf{q}(x, t) := -a \nabla u(x, t), \qquad a > 0$$

nennt man dabei entweder

- das Ficksche Gesetz der Diffusion;
- das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung, oder
- das Ohmsche Gesetz der elektrischen Ladung.

Beachte: Drei unterschiedliche physikalische Probleme liefern eine identische partielle Differentialgleichung.

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Laplacegleichung

Ist die Lösung der Wärmeleitungsgleichung unabhängig von der Zeit t, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial t} u(\mathbf{x}, t) = 0$$

so erhält man die Laplacegleichung

$$\Delta u(x) = 0$$

Lösungen dieser Gleichung nennt man harmonische Funktionen.

Die Gleichung

$$\Delta u(x) = f$$

mit gegebener Funktion f nennt man Poissongleichung.

Hierbei beschreibt die Inhomogenität etwa eine vorgegebene räumliche Ladungsverteilung f und die Lösung u das dadurch erzeugte Potential.

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Maxwell-Gleichungen

Gaußsches Gesetz	$\mathrm{div}\mathbf{D}(\mathbf{x},t)$	$=$	$\rho(\mathbf{x},t)$,
Gaußsches Gesetz für Magnetfelder	$\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$	$=$	0,
Induktionsgesetz	$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$	$=$	$-\mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$
Erweitertes Durchflutungsgesetz	$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(\mathbf{x},t)$	$=$	$\mathrm{rot}\mathbf{H}(\mathbf{x},t) - \mathbf{j}(\mathbf{x},t)$

H :	magnetische Feldstärke	B :	magnetische Flußdichte
E :	elektrische Feldstärke	D :	elektrische Flußdichte
j :	Verschiebungsstrom	ρ	Raumladungen

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Maxwell-Gleichungen

Gaußsches Gesetz	$\mathrm{div}\mathbf{D}(\mathbf{x},t)$	$=$	$\rho(\mathbf{x},t)$,
Gaußsches Gesetz für Magnetfelder	$\mathrm{div}\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$	$=$	0,
Induktionsgesetz	$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$	$=$	$-\mathrm{rot}\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$
Erweitertes Durchflutungsgesetz	$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{D}(\mathbf{x},t)$	$=$	$\mathrm{rot}\mathbf{H}(\mathbf{x},t)-\mathbf{j}(\mathbf{x},t)$

Zusätzlich sind noch Materialgesetze notwendig. Im Vakuum gilt etwa

$$
\begin{aligned}
\rho(\mathbf{x},t) &= 0,\\
\mathbf{j}(\mathbf{x},t) &= 0,\\
\mathbf{D}(\mathbf{x},t) &= \epsilon_0\mathbf{D}(\mathbf{x},t),\\
\mathbf{B}(\mathbf{x},t) &= \mu_0\mathbf{H}(\mathbf{x},t).
\end{aligned}
$$

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Die Telegraphengleichung

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Die Telegraphengleichung

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Die Wellengleichung

Was sind partielle Differentialgleichungen?

Die Wellengleichung

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Die Methode der Charakteristiken

Wir betrachten zunächst eine skalare quasilineare PDE 1. Ordnung gegeben durch

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Eine Lösung kann durch die Charakteristikenmethode berechnet werden, wobei wir zunächst den homogenen und linearen Fall betrachten.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Definition

Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

heißt das charakteristische Differentialgleichungssystem einer homogenen linearen PDE

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Die Methode der Charakteristiken

Wir berechnen nun

$$\frac{d}{dt}u(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}(t))u_{x_i}(x(t)).$$

Daraus folgt aber sofort:

Die Funktion $u(\mathbf{x})$ ist genau dann eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, wenn u entlang jeder Lösung $\mathbf{x}(t)$ des charakteristischen Differentialgleichungssystems konstant ist, d.h.

$$u(\mathbf{x}(t)) = \text{const.}$$

Definition

Man nennt die Lösung $u(\mathbf{x})$ dann ein erstes Integral des charakteristischen Differentialgleichungssystems.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Beispiel

Wir betrachten die PDE in drei Variablen

$$xu_x + yu_y + (x^2 + y^2)u_z = 0.$$

Das charakteristische System lautet dann

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x, \\ \dot{y} &= y, \\ \dot{z} &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

und besitzt die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t, \\ y(t) &= c_2 e^t, \\ z(t) &= \frac{1}{2}\left(c_1^2 + c_2^2\right)e^{2t} + c_3. \end{aligned}$$

Man nennt diese Lösungen auch die charakteristischen Kurven.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Beispiel (cont.)

Für die Lösung der Ausgangsgleichung gilt damit

$$u(x(t), y(t), z(t)) = u\left(c_1 e^t, c_2 e^t, \frac{1}{2}\left(c_1^2 + c_2^2\right)e^{2t} + c_3\right) = \text{const.}$$

Die charakteristischen Kurven erfüllen aber die Beziehungen

$$e^t = x(t)/c_1 = y(t)/c_2 \quad \Rightarrow \quad y(t)/x(t) = c_2/c_1 = c \in \mathbb{R}$$

und

$$z(t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_3 \quad \Rightarrow \quad z(t) - \frac{1}{2}(x(t)^2 + y(t)^2) = d \in \mathbb{R}$$

d.h. allein die beiden Konstanten c und d definieren den Wert von u entlang der charakteristischen Kurven.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Beispiel (cont.)

Daraus folgt die Lösungdarstellung

$$u(x,y,z) = \Phi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)$$

mit einer beliebigen C^1–Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Quasilineare inhomogene Differentialgleichungen

Die Methode der Charakteristiken lässt sich auf Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

übertragen.
Man betrachtet dazu das erweiterte Problem

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0, \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit der unbekannten Funktion $U = U(\mathbf{x}, u)$ von $(n+1)$ unabhängigen Variablen $\mathbf{x}$ und u.

Dann gilt: Ist $U(\mathbf{x}, u)$ eine Lösung mit $U_u \neq 0$, so ist durch $U(\mathbf{x}, u) = 0$ implizit eine Lösung $u = u(\mathbf{x})$ des Ausgangsproblems gegeben.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Beweis:

Gilt $U_u \neq 0$, so läßt die Funktion $U(x, u)$ nach dem Satz über implizite Funktionen nach $u(\mathbf{x})$ auflösen. Wegen $U(\mathbf{x}, u) = 0$ gilt dann

$$U_{x_i} + U_u u_{x_i} = 0.$$

Ferner haben wir

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0$$

und daraus folgt

$$-\left(\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i}\right) U_u + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0.$$

Wir erhalten also mit $U_u \neq 0$ die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u).$$

□

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Beispiel

Gesucht ist die allgemeine Lösung der quasilinearen Gleichung

$$(1+x)u_x - (1+y)u_y = y - x.$$

Das erweiterte Problem lautet dann

$$(1+x)U_x - (1+y)U_y + (y-x)U_u = 0.$$

Das charakteristische Differentialgleichungssystem ist

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1+x, \\ \dot{y} &= -(1+y), \\ \dot{u} &= y-x. \end{aligned}$$

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Beispiel (cont.)

mit der allgemeinen Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^t - 1, \\ y(t) &= c_2 e^{-t} - 1, \\ u(t) &= c_3 - c_2 e^{-t} - c_1 e^t. \end{aligned}$$

Wir verfahren wie im letzten Beispiel und lösen das charakteristische System auf:

$$e^t = \frac{x+1}{c_1} = \frac{c_2}{y+1} \quad \Rightarrow \quad (x+1)(y+1) = c_1 \cdot c_2 = c \in \mathbb{R}$$

und

$$u = c_3 - (x+1) - (y+1) \quad \Rightarrow \quad u + x + y = d \in \mathbb{R}.$$

Wieder bestimmen alleine die beiden Konstanten c und d das Lösungsverhalten.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Beispiel (cont.)

Daraus folgt die allerdings implizite Lösungdarstellung

$$\Phi\Big((x+1)(y+1), u+x+y\Big) = 0$$

mit einer beliebigen C^1–Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Beachte: Im Gegensatz zu linearen Gleichungen erhält man bei quasilinearen Gleichungen keine explizite Lösungsdarstellung und die Lösung existiert gegebenenfalls nur lokal.

Partielle Differentialgleichungen erster Ordnung

Beispiel (cont.)

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Nun: Eine Zeitvariable t und n Ortsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition

Das auf ganz $\mathbb{R}^n$ definierte Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} &= b(\mathbf{x}, t, u) \quad && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

bezeichnet man als ein Cauchy–Problem.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Anfangsbedingung

$$u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x})$$

explizit vorgegeben.

Die konkreten Lösungen lassen sich dann wiederum mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens berechnen.

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Beispiel (Transportgleichung)

$$\begin{aligned} u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit dem konstantem $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Methode der Charakteristiken liefert $(n+1)$ Differentialgleichungen

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \qquad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{a}$$

und wir können ohne Einschränkung $t = \tau$ annehmen.
Die Lösung der zweiten Gleichung lautet dann

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \cdot t$$

mit einer Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Die charakteristischen Kurven sind also gerade Geraden, die zur Zeit $t = 0$ den Punkt $\mathbf{x}_0$ durchlaufen und in Richtung $\mathbf{a}$ laufen.

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Beispiel (Transportgleichung)

Möchte man die Lösung an einem Punkt $(\mathbf{x}, t)$ bestimmen, so sucht man zunächst die zugehörige Charakteristik durch diesen Punkt und $(\mathbf{x}_0, 0)$ für ein $\mathbf{x}_0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{a}t.$$

Da die Lösung entlang der Charakteristiken konstant bleibt, folgt sofort die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)$$

Interpretation dieser Lösung:

Das gegebene Anfangsprofil $u_0(\mathbf{x})$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ weitertransportiert, ohne seine Form zu ändern.

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Beispiel (Transportgleichung, cont.)

Probe:
Es gilt

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{a}\nabla u_0, \ \nabla u(\mathbf{x}, t) = \nabla u_0 \quad \Rightarrow \quad u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0.$$

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Beispiel

Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + txu_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= \sin x && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Charakteristische Gleichung:

$$\dot{x} = tx, \qquad x(0) = x_0$$

besitzt Lösung

$$x(t) = x_0 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right).$$

Daraus folgt die Lösungsdarstellung des Anfangswertproblems:

$$u(x, t) = \sin\left[x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\right].$$

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Zurück zum anfangs definierten Cauchy–Problem

$$
\begin{aligned}
&u_t + \sum_{i=1}^{n} a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u), && \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\
&u = u_0 && \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\},
\end{aligned}
$$

Das charakteristische System lautet dann

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}, t, u), \\
\dot{u} &= b(\mathbf{x}, t, u)
\end{aligned}
$$

mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ und $u(0) = u_0(\mathbf{x}_0)$.

Dies ist ein gekoppeltes nichtlineares Differentialgleichungssystem, das unter Umständen nur lokale Lösungen in der Zeit besitzt. Im Allgemeinen wird daher die Methode der Charakteristiken nur lokal in der Zeit eine Lösung liefern.

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Beispiel (für lokale Lösungen in der Zeit)

Wichtige Klasse von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung: nichtlineare skalare Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension.

Das zugehörige Cauchy–Problem lautet:

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \quad && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Die gegebene Funktion $f = f(u)$ nennt man die Flußfunktion.

Solche Differentialgleichungen sind quasilinear, denn eine andere Darstellung der PDE ist

$$u_t + a(u)u_x = 0$$

mit $a(u) = f'(u)$.

Man nennt die Funktion $a(u)$ auch in Analogie zur Transportgleichung die lokale Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Beispiel (Burgers Gleichung)

Die wohl berühmteste Erhaltungsgleichung ist die sogenannte Burgers Gleichung [a] mit der Flußfunktion $f(u) = u^2/2$.

Wir betrachten im Folgenden das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \leq 0, \\ 1 - x & : \quad 0 < x < 1, \\ 0 & : \quad x \geq 1. \end{cases}$$

[a] Johannes Martinus Burgers, 1895–1981, niederländischer Physiker

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Burgers Gleichung

Wir verwenden die Methode der Charakteristiken, um die Lösung zu bestimmen.

Die charakteristische Gleichung lautet

$$\dot{x} = u, \quad x(0) = x_0.$$

Da die Lösung der Burgers Gleichung entlang der Kurve $x(t)$ konstant bleibt, gilt

$$\dot{x} = u_0(x_0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 + tu_0(x_0).$$

Das sieht zwar harmlos aus, ist es aber keineswegs!

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Burgers Gleichung

Mit der gegebenen Anfangsbedingung $u_0(x)$ erhalten wir

$$x(t) = \begin{cases} t + x_0 & : \quad x_0 \leq 0, \\ (1 - x_0)t + x_0 & : \quad 0 < x_0 < 1, \\ x_0 & : \quad x_0 \geq 1. \end{cases}$$

Das zugehörige Bild der charakteristischen Kurven:

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Burgers Gleichung (Singularität der Lösung)

Zur Zeit $t = 1$ laufen unendlich viele Kurven durch den Punkt $x = 1$, d.h. im Punkt $(x, t) = (1,1)$ ist die Lösung nicht mehr eindeutig.

In der Tat existiert die (klassische) Lösung der Burgers Gleichung mit der angegebenen Anfangsbedingung nur lokal in der Zeit für $0 \leq t < 1$.

Für $t \in [0,1)$ ist die Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : \quad x < t, \\ (1-x)/(1-t) & : \quad 0 \leq t \leq x < 1, \\ 0 & : \quad x > 1. \end{cases}$$

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Zugehöriges Bild der Lösung für verschiedene $t \in [0,1)$

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Beispiel: Skalare Erhaltungsgleichungen

Das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x = 0 \quad & \text{in } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u = u_0 \quad & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

hat im Allgemeinen keine globale Lösung.
Die Burgers Gleichung aus dem letzten Abschnitt mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \le 0, \\ 1 - x & : \quad 0 < x < 1, \\ 0 & : \quad x \ge 1 \end{cases}$$

besitzt nur auf dem Zeitintervall [0,1) die klassische Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} 1 & : \quad x < t, \\ (1-x)/(1-t) & : \quad 0 \le t \le x < 1, \\ 0 & : \quad x > 1. \end{cases}$$

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Was passiert für $t \geq 1$?

Zunächst: Funktionen mit kompaktem Träger

Definition

Der Träger einer Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist die Menge

$$\overline{\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \neq 0\}}.$$

Ist der Träger einer Funktion kompakt, so sprechen wir von einer Funktion mit kompaktem Träger.

Bemerkung

Es gibt (viele) differenzierbare, ja sogar unendlich oft differenzierbare Funktionen mit kompaktem Träger. Diese spielen in der modernen Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen eine entscheidende Rolle.

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Was passiert für $t \geq 1$?

Sei $v : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger.
Multiplikation von $u_t + f(u)_x = 0$ mit v und Integration über $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ liefert

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u_t + f(u)_x)\, v dx dt \\ &= -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty u v_t dx dt - \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0) dx - \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(u) v_x dx dt. \end{aligned}$$

Mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = u_0(x)$ ergibt sich

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (u v_t + f(u) v_x)\, dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x) v(x,0) dx = 0.$$

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Definition

Eine differenzierbare Funktion $v : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger nennt man auch eine Testfunktion.

Eine Funktion $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ nennt man eine schwache Lösung, falls die Beziehung

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + f(u)v_x)\, dxdt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v(x,0)dx = 0$$

für alle Testfunktionen v erfüllt ist.

Bemerkung

Eine schwache Lösung muß keine differenzierbare Funktion sein,
sondern
kann sogar Sprungstellen besitzen.

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Definition

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0, \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

nennt man ein Riemannproblem für skalare Erhaltungsgleichungen.

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Beispiel

Ein Riemannproblem für die Burgers Gleichung lautet

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0, \\ u_r & : \quad x > 0. \end{cases}$$

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Was sind in diesem Fall die schwachen Lösungen?

1) Stoßwellenlösung bei der Burgers Gleichung

Für $u_l \neq u_r$ ist die sogenannte Stoßwelle

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq s(t), \\ u_r & : \quad x > s(t) \end{cases}$$

eine schwache Lösung.
Dabei bezeichnet die Funktion $s(t)$ die Lage der Stoßfront, d.h. der Unstetigkeitsstelle oder Sprungstelle.
Die Stoßfront bewegt sich mit der Geschwindigkeit $\dot{s}(t)$ wobei

$$\dot{s}(t) = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

und $s(0) = 0$ ist.

Diese Beziehung nennt man die Rankine–Hugoniot Bedingung.

Anfangswertprobleme bei Gleichungen erster Ordnung

Was sind in diesem Fall die schwachen Lösungen?

2) Verdünnungswelle bei der Burger's Gleichung

Für $u_l < u_r$ ist die sogenannte Verdünnungswelle eine schwache Lösung

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq u_l\, t \\ \frac{x}{t} & : \quad u_l\, t \leq x \leq u_r\, t, \\ u_r & : \quad x \geq u_r\, t. \end{cases}$$

Man beachte, dass die Lösung $u(x,t)$ eine stetige Funktion ist.

Die Lösung ist entlang der Geraden $x = u_l\, t$ und $x = u_r\, t$ aber nicht differenzierbar und daher nur eine schwache Lösung.

Bemerkung

Für $u_l < u_r$ stellt sich die Frage, welche der Lösungen (Stoßwelle oder Verdünnungswelle) physikalisch von Bedeutung ist. Es wird sich zeigen, dass nur die Verdünnungswelle relevant ist.

Beschreibung der Stoßwellenlösung

Definition

Eine Stoßwellenlösung u ist eine schwache Lösung der Erhaltungsgleichung

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

wenn eine sogenannte Stoßfront $x = s(t)$, $s \in C^1$ existiert, sodass u jeweils für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ eine klassische Lösung der PDE ist und u bei $x = s(t)$ eine Sprungstelle mit Sprunghöhe

$$[u](t) = u(s(t)^+, t) - u(s(t)^-, t)$$

besitzt. Die Größe $\dot{s}(t)$ nennt man die Stoßgeschwindigkeit.

Beschreibung der Stoßwellenlösung

Satz

Ist $x = s(t)$ die Stoßfront einer Stoßwellenlösung von $u_t + f(u)_x = 0$, so gilt für die Stoßgeschwindigkeit $\dot{s}$ die Rankine–Hugoniot Bedingung

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{f(u(s(t)^-, t)) - f(u(s(t)^+, t)}{u(s(t)^-, t) - u(s(t)^+, t)}.$$

Beschreibung der Stoßwellenlösung

Herleitung der Rankine–Hugoniot Bedingung

Eine schwache Lösung erfüllt die Beziehung

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{x_1}^{x_2} u(\xi,t)d\xi = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t)).$$

Wählen wir $x_1 < s(t) < x_2$ so folgt

$$\frac{d}{dt}\left(\int\limits_{x_1}^{s(t)} u(\xi,t)d\xi + \int\limits_{s(t)}^{x_2} u(\xi,t)d\xi\right) = f(u(x_1,t)) - f(u(x_2,t)).$$

Beschreibung der Stoßwellenlösung

Herleitung der Rankine–Hugoniot Bedingung

Da $u(x,t)$ für $x < s(t)$ und $x > s(t)$ nach Definition eine differenzierbare Lösung ist, können wir unter den beiden Integralen ableiten:

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\xi + \dot{s}\, u(s(t)^-, t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\xi - \dot{s}\, u(s(t)^+, t) + f_2 - f_1 = 0.$$

Also

$$\int_{x_1}^{s(t)} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\xi + \dot{s}\, u(s(t)^-, t) + \int_{s(t)}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial t} \mathrm{d}\xi - \dot{s}\, u(s(t)^+, t) + f_2 - f_1 = 0$$

mit

$$f_1 := f(u(x_1,t)), \qquad f_2 := f(u(x_2,t)).$$

Beschreibung der Stoßwellenlösung

Herleitung der Rankine–Hugoniot Bedingung (cont.)

Im Grenzfall $x_1 \to s(t)^-$ und $x_2 \to s(t)^+$ verschwinden die Integrale und wir erhalten

$$\dot{s}\, u(s(t)^-, t) - \dot{s}\, u(s(t)^+, t) = f(u(s(t)^-)) - f(u(s(t)^+)).$$

Dies ist aber gerade die Rankine–Hugoniot Bedingung in der Form

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]}.$$

Beschreibung der Stoßwellenlösung

Beispiel

Wir betrachten die Burgers Gleichung mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0, \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

und $u_l > u_r$.
Die Rankine–Hugoniot Bedingung lautet

$$\dot{s} = \frac{[f]}{[u]} = \frac{u_l^2/2 - u_r^2/2}{u_l - u_r} = \frac{(u_l - u_r)(u_l + u_r)}{2(u_l - u_r)} = \frac{1}{2}(u_l + u_r).$$

Damit lautet die Stoßwellenlösung dieses Problems

$$u(x,t) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq \frac{1}{2}(u_l + u_r)\, t, \\ u_r & : \quad x > \frac{1}{2}(u_l + u_r)\, t. \end{cases}$$

Verdünnungswelle

Beschreibung der Verdünnungswelle

Wir betrachten das Riemannproblem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0, && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit der unstetigen Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l & : \quad x \leq 0, \\ u_r & : \quad x > 0 \end{cases}$$

wobei nun $u_l < u_r$ gelte.
Zusätzlich nehmen wir an, dass $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $f'' > 0$ gilt, d.h. die Flussfunktion sei strikt konvex.

Schließlich setzen wir noch

$$g := (f')^{-1}.$$

Verdünnungswelle

Beschreibung der Verdünnungswelle

Nach Annahme ist die Flussfunktion f strikt konvex, d.h. f' ist streng monoton wachsend. Also gilt

$$u_l < u_r \quad \Rightarrow \quad f'(u_l) < f'(u_r).$$

Es gibt daher genau zwei Typen von Charakteristiken, nämlich

$$x(t) = x_0 + f'(u_l)\,t \quad \text{und} \quad x(t) = x_0 + f'(u_r)\,t.$$

Diese beiden Kurvenscharen füllen aber nicht den ganzen Raum $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ aus, sondern es entsteht ein Bereich Ω, der nicht durchlaufen wird:

$$\Omega := \{(x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \;:\; f'(u_l) \cdot t < x < f'(u_r) \cdot t\}.$$

In Ω liefert die Methode der Charakteristiken keine Werte und wir können im Prinzip die Lösung auf Ω mit einer beliebigen schwachen Lösung füllen.

Verdünnungswelle

Satz

Für $u_l < u_r$ ist die Verdünnungswelle gegeben durch

$$u(x,t) := \begin{cases} u_l & : \quad x < f'(u_l)t, \\ g(x/t) & : \quad f'(u_l)t < x < f'(u_r)t, \\ u_r & : \quad x > f'(u_r)t \end{cases}$$

eine schwache Lösung des Riemannproblems. Insbesondere ist die Verdünnungswelle eine stetige Funktion.

Beweis: Stetigkeit der Verdünnungswelle: Die kritischen Punkte liegen bei

$$x = f'(u_l)\,t \quad \text{und} \quad x = f'(u_r)\,t.$$

Hier gilt

$$g\left(\frac{f'(u_l)\,t}{t}\right) = g(f'(u_l)) = (f')^{-1}(f'(u_l)) = u_l$$

Verdünnungswelle

sowie

$$g\left(\frac{f'(u_r)\,t}{t}\right) = g(f'(u_r)) = (f')^{-1}(f'(u_r)) = u_r.$$

Weiter ist die Verdünnungswelle konstant für $x < f'(u_l)\,t$ und $x > f'(u_r)\,t$ und löst daher die vorgegebene Erhaltungsgleichung. Für $f'(u_l)t < x < f'(u_r)t$ berechnet man

$$\begin{aligned} u_t &= -\frac{x}{t^2} g'(x/t) \\ f(u)_x &= f(g(x/t))_x = f'(g(x/t))\frac{g'(x/t)}{t} = \frac{x}{t^2} g'(x/t). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $g(x/t)$ ebenfalls die Gleichung $u_t + f(u)_x = 0$ löst.

Mit der Stetigkeit folgt daraus, dass die Verdünnungswelle tatsächlich eine schwache Lösung ist. □

Verdünnungswelle

Problem: Schwache Lösungen sind nicht eindeutig!!

Beispiel

Wir betrachten wieder die Burgers Gleichung mit der Anfangsbedingung

$$u_0(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq 0, \\ 1 & : \quad x > 0. \end{cases}$$

Dann erhalten wir zum Beispiel die beiden schwache Lösungen

$$u_1(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x \leq t/2, \\ 1 & : \quad x > t/2 \end{cases}$$

und

$$u_2(x,t) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0, \\ x/t & : \quad 0 \leq x \leq t, \\ 1 & : \quad x > t. \end{cases}$$

Die erste Lösung repräsentiert eine Stoßwelle, die zweite eine Verdünnungswelle.

Schwache Lösungen

Welche der beiden ist die physikalisch richtige Lösung?

Man benötigt eine Zusatzbedingung, die die physikalisch richtige schwache Lösung aussucht.

Definition

Eine schwache Lösung heißt Entropielösung, falls die Lösung die folgende Entropiebedingung (Lax–Oleinik–Bedingung) erfüllt:

$$\exists\, C > 0, \text{ sodass für alle } x, z \in \mathbb{R},\ t > 0 \text{ mit } z > 0 \text{ gilt}$$

$$u(t, x + z) - u(t, x) < \frac{C}{t} z.$$

Satz

Erfüllt eine schwache Lösung die oben angegebene Entropiebedingung, so ist diese Lösung eindeutig, d.h. Entropielösungen sind eindeutige Lösungen.

Partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung

PDEs zweiter Ordnung

Definition

Eine lineare PDE 2. Ordnung in n Variablen ist gegeben durch

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g.$$

Dabei sind die Terme a_{ij}, b_i, f und g Funktionen von $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$.
Den ersten Term nennt man den Hauptteil der PDE. Weiter gelte oBdA

$$a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Spezialfall

Gilt $a_{ij} = \text{const.}$, $i, j = 1, \ldots, n$, so läßt sich die PDE auch in folgender Matrixschreibweise darstellen:

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^T \nabla) u + fu = g$$

PDEs zweiter Ordnung

Normalformen linearer Gleichungen 2. Ordnung

Gegeben sei die Differentialgleichung (in Matrixschreibweise)

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla)u + (\mathbf{b}^T \nabla)u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

Lineare Algebra (Hauptachsentransformation)

Jede reelle, symmetrische Matrix **A** ist diagonalisierbar. Weiter gilt

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S},$$

wobei **S** als eine orthogonale Matrix gewählt werden kann.

PDEs zweiter Ordnung

Ansatz zur Herleitung von Normalformen

Verwende die Koordinatentransformation

$$\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{y} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathbf{y} = \mathbf{S}^T\,\mathbf{x}$$

und setze

$$\tilde{u}(\mathbf{y}) := u(\mathbf{S}\,\mathbf{y}).$$

Mit $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{S}^T\,\mathbf{x})$ folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i}.$$

Wegen $\dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} = s_{ij}$ gilt

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} s_{ij} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_j}.$$

PDEs zweiter Ordnung

Ansatz zur Herleitung von Normalformen

Die letzte Beziehung bedeutet aber gerade

$$\nabla_x u(\mathbf{x}) = \mathbf{S} \nabla_y \tilde{u}(\mathbf{S}^T \mathbf{x})$$

oder in formaler Schreibweise

$$\nabla_x = \mathbf{S} \nabla_y .$$

Transponieren wir diese Beziehung, so folgt

$$\nabla_x^T = (\mathbf{S} \nabla_y)^T = \nabla_y^T S^T .$$

Ergebnis

Löst u die Gleichung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^T \nabla) u + fu = g,$$

so erhalten wir für $\tilde{u}$ die PDE

$$(\nabla^T \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S} \nabla) \tilde{u} + (\mathbf{b}^T \mathbf{S} \nabla) \tilde{u} + \tilde{f} \tilde{u} = \tilde{g}.$$

PDEs zweiter Ordnung

Definition

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^T \nabla) u + f u = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.
Dann ist die zugehörige Diagonalform der PDE gegeben durch

$$(\nabla^T \mathbf{D}\, \nabla)\tilde{u} + ((\mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{b}})^T \nabla)\tilde{u} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}$$

mit der Diagonalmatrix

$$\mathbf{D} = \mathbf{S}^T \mathbf{A} \mathbf{S}, \qquad \mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{I}$$

Dabei ist $\tilde{\mathbf{b}}(\mathbf{y}) := \mathbf{b}(\mathbf{S}\,\mathbf{y})$ und

$$\tilde{f}(\mathbf{y}) := f(\mathbf{S}\,\mathbf{y}), \qquad \tilde{g}(\mathbf{y}) := g(\mathbf{S}\,\mathbf{y}).$$

PDEs zweiter Ordnung

Beispiel

Wir betrachten den Fall von zwei unabhängigen Variablen:

$$\begin{aligned} a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + & \\ b_1(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1,x_2)u &= g(x_1,x_2). \end{aligned}$$

Mit $\tilde{\mathbf{p}} := \mathbf{S}^T\tilde{\mathbf{b}}$ lautet die Diagonalform

$$\lambda_1\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{p}_1\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}.$$

Beachte

Die Transformation auf Diagonalform ist keineswegs eindeutig, allerdings sind die beiden Koeffizienten des Hauptterms gerade die Eigenwerte der Ausgangsmatrix **A**.

PDEs zweiter Ordnung

Definition (Klassifikation partieller Differentialgleichungen 2. Ordnung)

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$(\nabla^T \mathbf{A} \nabla) u + (\mathbf{b}^T \nabla) u + fu = g$$

mit der konstanten und symmetrischen Matrix $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$.

1) Sind sämtliche Eigenwerte von **A** von Null verschieden und besitzen sie einheitliche Vorzeichen, so nennt man die Gleichung elliptisch.
2) Sind sämtliche Eigenwerte von **A** von Null verschieden, wobei ein Eigenwert ein anderes Vorzeichen als die übrigen $n - 1$ Eigenwerte besitzt, so nennt man die Gleichung hyperbolisch.
3) Ist mindestens ein Eigenwert von **A** gleich Null, so nennt man die Gleichung parabolisch.

PDEs zweiter Ordnung

Beispiel

Wir betrachten wiederum den Fall von zwei unabhängigen Variablen:

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} +$$

$$b_1(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_1} + b_2(x_1,x_2)\frac{\partial u}{\partial x_2} + f(x_1,x_2)u \quad = \quad g(x_1,x_2).$$

Dann ist die Diagonalform gegeben durch:

$$\lambda_1\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_1^2} + \lambda_2\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_2^2} + \tilde{p}_1\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_1} + \tilde{p}_2\frac{\partial \tilde{u}}{\partial y_2} + \tilde{f}\tilde{u} = \tilde{g}.$$

Die partielle Differentialgleichung ist

1) elliptisch, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ ist.
2) hyperbolisch, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ ist.
3) parabolisch, falls $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$ ist.

PDEs zweiter Ordnung

Bemerkung

Die Typeneinteilung läßt sich auf Fälle mit nichtkonstanter Koeffizientenmatrix **A** erweitern: die Gleichung

$$yu_{xx} - u_{xy} - u_{yx} + xu_{yy} = 0$$

hat die Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} y & -1 \\ -1 & x \end{pmatrix}.$$

Die Diskriminante D lautet daher

$$D = 1 - xy$$

Die Gleichung ist also parabolisch auf der Hyperbel $xy = 1$, elliptisch in den beiden konvexen Bereichen $xy > 1$ und hyperbolisch im zusammenhängenden Bereich $xy < 1$.

PDEs zweiter Ordnung

Beispiel

Die Tricomi–Gleichung

$$k(y)u_{xx} - u_{yy} = g(x,y)$$

ist elliptisch für $k(y) < 0$, hyperbolisch für $k(y) > 0$ und parabolisch für $k(y) = 0$.

Zentrale Frage:

Wieso macht man eine solche Typeneinteilung?

Zentrale Antwort:

Jede Typenklasse hat charakteristisches Lösungsverhalten!

PDEs zweiter Ordnung

Normalform

1) Die Normalform einer elliptischen Differentialgleichung in n Variablen $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ ist

$$\Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g.$$

2) Die Normalform einer hyperbolischen Differentialgleichung in $(n+1)$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)^T$ ist

$$u_{tt} - \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + fu = g.$$

Hierbei bezeichnet Δ den Laplace–Operator bezüglich $\mathbf{x}$.

PDEs zweiter Ordnung

Normalform

3) Die Normalform einer parabolischen Differentialgleichung in $(n+1)$ Variablen $(\mathbf{x}, t) = (x_1, \ldots, x_n, t)^T$ ist

$$\Delta u + b_0 u_t + \sum_{i=1}^{n-1} b_i u_{x_i} + fu = g,$$

wobei Δ wiederum den Laplace–Operator bezüglich $\mathbf{x}$ bezeichnet.

PDEs zweiter Ordnung

Klassische Beispiele:

1) Elliptische Laplacegleichung

$$\Delta u = 0;$$

2) Hyperbolische Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0;$$

3) Parabolische Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = \Delta u.$$

PDEs zweiter Ordnung

Definition

Ein korrekt gestelltes Problem besteht aus einer in einem Gebiet definierten partiellen Differentialgleichung zusammen mit einer gewissen Menge von Anfangs– und/oder Randbedingungen, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

1) **Existenz:**
   Es existiert wenigstens eine Lösung, die alle Bedingungen erfüllt.
2) **Eindeutigkeit:**
   Die Lösung ist eindeutig.
3) **Stabilität:**
   Die Lösung hängt stetig von den Anfangs– bzw. Randbedingungen ab, d.h. geringfügige Änderungen in den Daten ergeben geringfügige Änderungen in der Lösung.

PDEs zweiter Ordnung

Beispiel (Eindimensionale Wellengleichung)

Das Anfangswertproblem für die eindimensionale Wellengleichung

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u = u_0, u_t &= v_0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

ist ein korrekt gestelltes hyperbolisches Problem.

Physikalische Motivation

Die Wellengleichung beschreibt das dynamische Verhalten einer eingespannten Saite, die zur Zeit $t = 0$

1) um die Funktion $u_0(x)$ ausgelenkt ist, und
2) sich mit der Geschwindigkeit $v_0(x)$ bewegt.

PDEs zweiter Ordnung

Beispiel (Eindimensionale Wellengleichung)

Die eindeutig bestimmte Lösung ist bestimmt durch die (Formel von d'Alembert):

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(u_0(x-ct) + u_0(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} v_0(\xi)\,d\xi.$$

Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Sei $\tilde{u}(x,t)$ die Lösung zu den Anfangsdaten $(\tilde{u}_0, \tilde{v}_0)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x,t) - u(x,t) &= \frac{1}{2}\Big(\tilde{u}_0(x-ct) - u_0(x-ct)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2}\Big(\tilde{u}_0(x+ct) - u_0(x+ct)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct}\Big(\tilde{v}_0(\xi) - v_0(\xi)\Big)\,d\xi
\end{aligned}$$

PDEs zweiter Ordnung

Stetige Abhängigkeit von den Anfangsdaten

Daraus folgt aber

$$|\tilde{u}(x,t) - u(x,t)| \leq \max_{x\in\mathbb{R}} |\tilde{u}_0(x) - u_0(x)| + t \max_{x\in\mathbb{R}} |\tilde{v}_0(x) - v_0(x)|.$$

Anfangswertaufgabe für die Laplacegleichung

Beispiel (Hadamard)

Das Anfangswertproblem für die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0 \quad && \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u = u_0, u_y &= v_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{y = 0\} \end{aligned}$$

ist ein nicht korrekt gestelltes elliptisches Problem.

Setzen wir $u_0(x) = v_0(x) = 0$, so ist die eindeutig bestimmte Lösung gegeben durch

$$u(x, y) = 0.$$

Lauten die Anfangsdaten dagegen

$$u_o^n(x) = 0, \quad v_o^n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx), \quad n \in \mathbb{N},$$

Anfangswertaufgabe für die Laplacegleichung

Beispiel (Hadamard)

so ist die eindeutig bestimme Lösung zu den Anfangsdaten (u_0^n, v_0^n)

$$u^n(x,y) = \frac{1}{n^2}\sin(nx)\sinh(ny).$$

Nun gilt

$$\lim_{n\to\infty} u_0^n = u_0, \qquad \lim_{n\to\infty} v_0^n = v_0.$$

Vergleicht man aber beide Lösungen, so ergibt sich wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sinh(ny) = \infty \qquad (y > 0)$$

das Grenzverhalten

$$\lim_{n\to\infty} u^n(x,y) \neq u(x,y),$$

d.h. die Lösung hängt nicht stetig von den Anfangsdaten ab.

Randwertaufgabe für die Laplacegleichung

Beispiel (Randwertaufgabe für die Laplacegleichung)

Das Randwertproblem für die zweidimensionale Laplacegleichung

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad & \text{in } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\}, \\ u = g \quad & \text{auf } \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 = 1\} \end{aligned}$$

ist ein korrekt gestelltes elliptisches Problem.

Die eindeutig bestimmte Lösung ist durch die Poissonsche Integralformel gegeben:

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{2\pi} \int_{\|\mathbf{z}\|=1} \frac{g(\mathbf{z})}{\|\mathbf{x} - \mathbf{z}\|^2} \, d\sigma.$$

Die Laplacegleichung

Laplacegleichung

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Laplacegleichung

$$\Delta u = 0, \qquad u = u(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

und der zugehörigen Poissongleichung

$$-\Delta u = f$$

mit vorgegebener rechten Seite $f = f(\mathbf{x})$.

Definition

Eine C^2–Funktion $u = u(\mathbf{x})$, die die Laplacegleichung erfüllt, d.h. es gilt

$$\Delta u = 0$$

nennt man eine harmonische Funktion.

Laplacegleichung - Die Fundamentallösung

Beobachtung

Der Laplaceoperator Δ ist invariant gegenüber Rotationen in $\mathbb{R}^n$

Lösungsansatz:

$$u(\mathbf{x}) = v(r), \quad r = \|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}.$$

Man rechnet leicht nach:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{1}{2}(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{-1/2}\, 2x_i = \frac{x_i}{r} \quad (x \neq 0)$$

und damit gilt für $i = 1, \ldots, n$:

$$u_{x_i} = v'(r)\frac{x_i}{r}, \quad u_{x_i x_i} = v''(r)\,\frac{x_i^2}{r^2} + v'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right).$$

Laplacegleichung - Die Fundamentallösung

Wir erhalten also

$$\Delta u = v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r)$$

und mit $\Delta u = 0$ ergibt sich die gewöhnliche Differentialgleichung

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} v'(r) = 0.$$

Setzen wir $w = v' \neq 0$, so löst w die lineare Differentialgleichung

$$w' = -\frac{n-1}{r} w$$

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung ist gegeben durch

$$w(r) = \frac{\alpha}{r^{n-1}}$$

mit einer Konstanten $\alpha \in \mathbb{R}$. Für $v(r)$ gilt demnach

$$v' = \frac{\alpha}{r^{n-1}}.$$

Laplacegleichung - Die Fundamentallösung

Integriere Gleichung für v erhalte

$$v(r) = \begin{cases} -b \log r + c & (n = 2) \\ \dfrac{b}{r^{n-2}} + c & (n \geq 3) \end{cases}$$

mit den beiden Konstanten b und c.

Definition

Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \log \|x\| & (n = 2) \\ \dfrac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \|x\|^{2-n} & (n \geq 3) \end{cases}$$

definiert für $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, nennt man die Fundamentallösung der Laplacegleichung. Die Konstante $\alpha(n)$ bezeichnet dabei das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$.

Laplacegleichung - Die Fundamentallösung

Bemerkung

Die Fundamentallösung ist für alle $\mathbf{x} \neq 0$ eine harmonische Funktion.

Beispiel:

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ gilt vol $(K_1(0)) = \alpha(3) = 4\pi/3$ und damit ist die Fundamentallösung gegeben durch

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{||\mathbf{x}||}.$$

Satz (Darstellung der Lösung der Poissongleichung)

Eine Lösung der Possiongleichung $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y})\, d\mathbf{y}.$$

Laplacegleichung - Die Mittelwerteigenschaft

Besondere Eigenschaft harmonischer Funktionen: Der Funktionswert an einer Stelle $\mathbf{x}$ ist stets gleich dem Mittelwert von u über eine Kugel mit Mittelpunkt $\mathbf{x}$ bzw. der zugehörigen Sphäre um $\mathbf{x}$.

Satz

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge. Ist $u \in C^2(\Omega)$ harmonisch, dann gilt

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u \, dS = \fint_{B(\mathbf{x},r)} u \, d\mathbf{y}$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$.

Notation

Bei Mittelungen über die Kugel oder die Sphäre schreiben wir

$$\fint \cdots = \frac{1}{\mathrm{vol}(B(\mathbf{x}, r))} \int \cdots .$$

Laplacegleichung - Die Mittelwerteigenschaft

Beweis:

Wir definieren für festes $\mathbf{x} \in \Omega$ die Funktion $\phi(r)$ durch

$$\phi(r) := \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) = \fint_{\partial B(0,1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{z})\, dS(\mathbf{z}).$$

Dann gilt

$$\phi'(r) = \fint_{\partial B(0,1)} u'(\mathbf{x} + r\mathbf{z}) \cdot \mathbf{z}\, dS(\mathbf{z})$$

und mit Hilfe des Satzes von Gauß erhalten wir

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u'(\mathbf{y}) \cdot \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{r}\, dS(\mathbf{y}) \\ &= \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}\, dS(\mathbf{y}) \\ &= \frac{r}{n} \fint_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} = 0. \end{aligned}$$

Laplacegleichung - Die Mittelwerteigenschaft

Damit ist ϕ konstant und es gilt

$$\phi(r) = \lim_{t\to 0} \phi(t) = \lim_{t\to 0} \fint_{\partial B(\mathbf{x},t)} u(\mathbf{y})\, dS(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x}).$$

Unter Verwendung von Polarkoordinaten erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}\int\limits_{B(\mathbf{x},r)} u\, d\mathbf{y} &= \int\limits_0^r \Bigg(\int\limits_{\partial B(\mathbf{x},s)} u dS \Bigg) ds \\ &= u(\mathbf{x}) \int\limits_0^r n\alpha(n) s^{n-1} ds = \alpha(n) r^n u(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Damit ergibt sich gerade die Mittelwertformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int\limits_{B(\mathbf{x},r)} u\, d\mathbf{y}.$$

Laplacegleichung - Die Mittelwerteigenschaft

Es gilt auch folgende Umkehrung:

Satz

Für die Funktion $u \in C^2(\Omega)$ gelte

$$u(\mathbf{x}) = \fint_{\partial B(\mathbf{x},r)} u dS$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$, dann ist u harmonisch.

Beweis:

Ist $\Delta u \neq 0$, so existiert eine Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$, sodass $\Delta u > 0$ innerhalb von $B(\mathbf{x}, r)$ gilt. Wir wissen aber, dass

$$0 = \phi'(r) = \frac{r}{n} \fint_{B(\mathbf{x},r)} \Delta u(\mathbf{y})\, d\mathbf{y} > 0,$$

was zu einem Widerspruch führt. Also ist u harmonisch.

Laplacegleichung - Das Maximumprinzip

Satz (Maximumprinzip harmonischer Funktionen)

Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω. Dann gilt:

1) Maximumprinzip

$$\max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} u(\mathbf{x}).$$

2) Starkes Maximumprinzip
   Ist Ω zusammenhängend und existiert ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ mit

$$u(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x})$$

   so folgt, dass u auf Ω konstant ist.

Beweisidee:

Verwende auf geeignete Weise die Mittelwerteigenschaft harmonischer Funktionen.

Laplacegleichung - Eindeutige Lösung der Randwertaufgabe

Satz

Sei $g \in C(\partial\Omega)$, $f \in C(\Omega)$. Dann existiert höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ des Randwertproblems

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Beweis:

Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen. Dann löst $w = \pm(u_1 - u_2)$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Aus dem Maximumprinzip folgt dann direkt

$$w = \pm(u_1 - u_2) = 0$$

identisch auf Ω und daher gilt $u_1 = u_2$. $\square$

Laplacegleichung - Die Lösungseigenschaften

Weitere Eigenschaften

1) Erfüllt eine stetige Funktion $u \in C(\Omega)$ auf einer offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$ die Mittelwerteigenschaft, so ist u unendlich oft differenzierbar, d.h. $u \in C^\infty(\Omega)$.

2) Satz von Liouville:
Die Funktion $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sei harmonisch und beschränkt. Dann folgt bereits, dass u auf ganz $\mathbb{R}^n$ konstant ist.

3) Beschränkte Lösungen der Poissongleichung:
Sei $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ mit kompaktem Träger, $n \geq 3$. Dann hat jede beschränkte Lösung der Poissongleichung $-\Delta u = f \quad$ in $\mathbb{R}^n$ die Form

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + C$$

mit einer Konstanten C.

Laplacegleichung - Die Greensche Funktion

Definition

1) Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

nennt man das Dirichlet–Problem der Poissongleichung (bzw. der Laplacegleichung, falls $f = 0$).

2) Das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

nennt man das Neumann–Problem der Poissongleichung (bzw. der Laplacegleichung, falls $f = 0$).
Hierbei bezeichnet n die äußere Normale an $\partial\Omega$.

Laplacegleichung - Die Greensche Funktion

Proposition

Sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt für alle Punkte $\mathbf{x} \in \Omega$ die Beziehung

$$
\begin{aligned}
u(\mathbf{x}) \quad &= \int\limits_{\partial\Omega} \left(\Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(y) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \right) dS(\mathbf{y}) \\
&\quad - \int\limits_{\Omega} \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}.
\end{aligned}
$$

Die Funktion Φ bezeichnet dabei wieder die Fundamentallösung der Laplacegleichung.

Beweis: Greensche Formeln aus Analysis III.

Anwendung auf Randwertprobleme der Laplace– und Poissongleichung: Wir können im Prinzip die Lösung an jedem Punkt berechnen, aber benötigen dazu Randdaten sowohl für u als auch die Ableitung $\partial u / \partial \mathbf{n}$.

Laplacegleichung - Die Greensche Funktion

Definition

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung des Dirichlet–Problems

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^x &= 0 && \text{in } \Omega, \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann ist die Greensche Funktion auf Ω gegeben durch

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y} \in \Omega,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}).$$

Satz

Sei $u \in C^2(\bar{\Omega})$ eine Lösung des Dirichlet–Problems der Poissongleichung. Dann läßt sich u darstellen in der Form

$$u(\mathbf{x}) = -\int_{\partial\Omega} g(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) + \int_{\Omega} f(\mathbf{y}) G(\mathbf{x},\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (\mathbf{x} \in \Omega).$$

Laplacegleichung - Die Greensche Funktion

Beweis:

Nach obiger Proposition hatten wir die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} \left(\Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \right) dS(\mathbf{y}) - \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$$

Das Problem dabei war, dass uns beim Dirichlet–Problem die Randdaten von $\partial u/\partial \mathbf{n}$ nicht bekannt sind.

Nach den Greenschen Formeln gilt aber

$$-\int_{\Omega} \Phi^x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) - \Phi^x(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y})$$

und daher

$$\int_{\partial\Omega} \Phi^x(\mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} \Phi^x(\mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS(\mathbf{y}).$$

Laplacegleichung - Die Greensche Funktion

Aus der Randbedingung $\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ folgt

$$\int_{\partial\Omega} \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})(\mathbf{y})\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}) = \int_{\Omega} \Phi^x(\mathbf{y})\Delta u(\mathbf{y})d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y})\frac{\partial \Phi^x}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y})dS(\mathbf{y}).$$

Wir erhalten damit unter Ausnutzung der obigen Proposition:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{y}) \underbrace{\left(\frac{\partial \Phi^x(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}} - \frac{\partial \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x})}{\partial \mathbf{n}}\right)}_{-\frac{\partial G(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}}} dS(\mathbf{y}) \\ &\quad + \int_{\Omega} \underbrace{(\Phi^x(\mathbf{y}) - \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}))}_{-G(\mathbf{x},\mathbf{y})} \Delta u(\mathbf{y})d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

$\square$

Laplacegleichung - Eigenschaften der Greenschen Funktion

1) die Greensche Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ ist bis auf den Punkt $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ harmonisch in $\mathbf{y}$,

2) $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ erfüllt homogene Randbedingungen, d.h.
$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall\, \mathbf{y} \in \partial\Omega,\ \mathbf{x} \in \Omega,$$

3) die Greensche Funktion ist eindeutig bestimmt,

4) die Greensche Funktion ist symmetrisch, d.h.
$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Beispiele

1) die Greensche Funktion für den Halbraum
$$\mathbb{R}^n_+ = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \ :\ x_n > 0\};$$

2) die Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0,1)$.

Laplacegleichung - Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$

Allgemein ist die Greensche Funktion gegeben durch

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi^x(\mathbf{y}).$$

Dabei ist $\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ die Fundamentallösung und $\Phi^x(\mathbf{y})$ die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^x &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n_+ \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) && \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \,:\, x_n = 0\}. \end{aligned}$$

Für einen Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$ definieren wir die Reflektion an der Ebene $\partial\mathbb{R}^n_+$ mittels

$$\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n).$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$\Phi^x(\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1 - x_1, \ldots, y_{n-1} - x_{n-1}, y_n + x_n) \quad (x, y \in \mathbb{R}^n_+).$$

Laplacegleichung - Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$

Dann ist $\Phi^x(\mathbf{y})$ harmonisch auf dem ganzen Halbraum $\mathbb{R}^n_+$ und auf dem Rand gilt:

$$\begin{aligned}\Phi^x(\mathbf{y}) &= \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) = \Phi(y_1-x_1,\dots,y_{n-1}-x_{n-1},x_n)\\ &= \Phi(y_1-x_1,\dots,y_{n-1}-x_{n-1},-x_n) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}),\end{aligned}$$

da die Fundamentallösung nur von $|\mathbf{y}-\mathbf{x}|$ abhängt.

Also löst die Funktion $\Phi^x(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}})$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned}\Delta\Phi^x &= 0 && \text{in } \mathbb{R}^n_+\\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) && \text{auf } \{\mathbf{y}=(y_1,\dots,y_n)^T \,:\, y_n=0\}\end{aligned}$$

und die Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$ lautet

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) \qquad (\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n_+,\ \mathbf{x}\neq\mathbf{y}).$$

Laplacegleichung - Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$

Man berechnet nun

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}) \\ &= \frac{-1}{n\alpha(n)}\left[\frac{y_n - x_n}{|\mathbf{y}-\mathbf{x}|^n} - \frac{y_n + x_n}{|\mathbf{y}-\tilde{\mathbf{x}}|^n}\right]\end{aligned}$$

und damit gilt für $\mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{\partial G}{\partial y_n}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = -\frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n}.$$

Definition

Die Funktion

$$K(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \frac{2x_n}{n\alpha(n)}\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^n} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n_+, \mathbf{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+)$$

nennt man auch den Poissonkern von $\mathbb{R}^n_+$.

Laplacegleichung - Greensche Funktion für den Halbraum $\mathbb{R}^n_+$

Satz (Dirichlet–Problem für die Laplacegleichung)

Die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n_+, \\ u &= g \quad \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T : x_n = 0\} \end{aligned}$$

ist gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{2x_n}{n\alpha(n)} \int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} d\mathbf{y}.$$

Insbesondere ist die Lösung $u(\mathbf{x})$ wegen

$$\int\limits_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dy = 1$$

beschränkt, falls g beschränkt ist, Man kann weiter zeigen, dass die Lösung sogar unendlich oft differenzierbar ist.

Laplacegleichung - Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0,1)$

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, bezeichnet der Punkt

$$\tilde{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^2}$$

den dualen Punkt von $\mathbf{x}$ bezüglich $\partial B(0,1)$.

Damit ist die Lösung des Korrekturproblems

$$\begin{aligned} \Delta\Phi^x &= 0 && \text{in } B^0(0,1) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \quad |\mathbf{x}| < 1\}, \\ \Phi^x &= \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) && \text{auf } \partial B(0,1) \end{aligned}$$

gegeben durch

$$\Phi^x(\mathbf{y}) := \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})),$$

und wir erhalten folgende Greensche Funktion für die Einheitskugel:

$$G(\mathbf{x},\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) - \Phi(|\mathbf{x}|(\mathbf{y} - \tilde{\mathbf{x}})) \quad (\mathbf{x},\mathbf{y} \in B(0,1), \mathbf{x} \neq \mathbf{y}).$$

Laplacegleichung - Greensche Funktion für die Einheitskugel $B(0,1)$

Satz (Dirichlet–Problem für die Laplacegleichung)

Die Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T : |\mathbf{x}| < 1\}, \\ u &= g \quad \text{auf } \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T : |\mathbf{x}| = 1\} \end{aligned}$$

ist gegeben durch die Poissonsche Integralformel

$$u(\mathbf{x}) = \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \int\limits_{|\mathbf{y}|=1} \frac{g(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} dS(\mathbf{y}).$$

Der Poissonkern für die Einheitskugel lautet demnach

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{n\alpha(n)} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^n} \quad (|\mathbf{x}| < 1, |\mathbf{y}| = 1).$$

Laplacegleichung - Greensche Funktion für die Kugel $B(0,1)$ mit Radius r

Bemerkung

Mit Hilfe der Transformation $\tilde{u}(\mathbf{x}) = u(r\mathbf{x})$ kann man leicht eine Darstellung für die Kugel $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \; : \; |\mathbf{x}| < r\}$ ableiten.

Die Wärmeleitungsgleichung

Die Wärmeleitungsgleichung

Wir suchen explizite Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

$$u_t(\mathbf{x}, t) = \Delta u(\mathbf{x}, t).$$

Hier ist $t \geq 0$ die Zeitvariable und $\mathbf{x} \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable.

Anfangswertproblem: (Cauchy–Problem)

Sei $\Omega = \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T], \\ u &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Anfangs–Randwertproblem:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt:

$$\begin{aligned} u_t &= \Delta u \quad \text{in } \Omega_T := \Omega \times (0, T], \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T. \end{aligned}$$

Die Wärmeleitungsgleichung - Lösungen mittels Produktansätzen

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && : \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t \leq T, \\ u(x,0) &= u_0(x) && : \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) &= a(t),\ u(\pi,t) = b(t) && : \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Wir suchen eine Lösung mittels des Produktansatzes:

$$u(x,t) = p(x) \cdot q(t)$$

Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung ergibt

$$p(x)\dot{q}(t) = q(t)p''(x)$$

und damit die Beziehung

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} \qquad (p(x) \neq 0,\ q(t) \neq 0).$$

Die Wärmeleitungsgleichung - Lösungen mittels Produktansätzen

In der Gleichung

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)}, \qquad (p(x) \neq 0,\ q(t) \neq 0)$$

steht

- auf der **linken** Seite ein Term, der nur von t abhängt,
- auf der **rechten** Seite ein Term, der nur von x abhängt.

Daraus folgt

$$\frac{\dot{q}(t)}{q(t)} = \frac{p''(x)}{p(x)} = \text{const} =: -\delta.$$

Wir erhalten also die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{q}(t) + \delta\, q(t) = 0 \qquad \text{und} \qquad p''(x) + \delta\, p(x) = 0.$$

Die Wärmeleitungsgleichung - Lösungen mittels Produktansätzen

Die allgemeine Lösung der Gleichung $\dot{q}(t) + \delta\, q(t) = 0$ ist gegeben durch

$$q(t) = c_0\, e^{-\delta t}.$$

Die Lösung der Gleichung $p''(x) + \delta\, p(x) = 0$ hängt entscheidend von der Konstanten δ ab:

1) Für $\delta = 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 x + c_2.$$

2) Für $\delta < 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 e^{-\sqrt{|\delta|}x} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|}x}.$$

3) Für $\delta > 0$ lautet die allgemeine Lösung

$$p(x) = c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x).$$

Die Wärmeleitungsgleichung - Lösungen mittels Produktansätzen

Ohne Berücksichtigung der vorgegebenen Anfangs– und Randbedingungen liefert Produktansatz folgende Lösungsklassen:

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 x + c_2), \\
u(x,t) &= c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 e^{-\sqrt{|\delta|}x} + c_2 e^{\sqrt{|\delta|}x}), \\
u(x,t) &= c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)).
\end{aligned}
$$

Die vorgegebenen Anfangs– und Randbedingungen lauten

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u(0,t) = a(t), \qquad u(\pi,t) = b(t).$$

Fazit

Die Parametermenge $\{c_0, c_1, c_2, \delta\}$ kann i.A. nicht gegebene Funktionen $u_0(x), a(t)$ und $b(t)$ beschreiben.
Der Produktansatz liefert nur bei speziellen Anfangs– und Randbedingungen eine explizite Lösung.

Die Wärmeleitungsgleichung - Lösungen mittels Produktansätzen

Beispiel

Gegeben sei das eindimensionale Anfangs–Randwertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} && 0 < x < \pi,\ 0 < t \leq T, \\ u(x,0) &= \sin x && 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) &= 0,\ u(\pi,t) = 0 && 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Aufgrund der vorgegebenen Randbedingungen fallen grundsätzlich die ersten beiden Lösungsklassen aus. Es bleibt also

$$u(x,t) = c_0\, e^{-\delta t} \cdot (c_1 \sin(\sqrt{\delta}x) + c_2 \cos(\sqrt{\delta}x)).$$

Wegen der Vorgabe $u(x,0) = \sin x$ erhalten wir die Lösung

$$u(x,t) = e^{-t} \sin x.$$

Das Beispiel sieht etwas künstlich aus, ist es aber nicht!

Die Wärmeleitungsgleichung - Superpositionsprinzip

Superpositionsprinzip

Jede Lösung der Form

$$u(x,t) = b_k e^{-k^2 t} \sin(kx) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

erfüllt die homogenen Randbedingungen $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Eine Überlagerung

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k e^{-k^2 t} \sin(kx)$$

ergibt die Anfangsbedingung

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Für eine gegebene Anfangsbedingung $u_0(x)$ ist die rechte Seite eine Entwicklung in eine Fourier–Reihe, d.h.

$$u_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx).$$

Die Wärmeleitungsgleichung - Die Fundamentallösung

Definition

Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{x}|^2}{4t}} & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0), \\ 0 & (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0) \end{cases}$$

heißt Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung.

Insbesondere ist die Fundamentallösung **normiert**, d.h. für alle $t > 0$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x, t) dx = 1.$$

Bemerkung

Die Fundamentallösung besitzt für $t = 0$ und $\mathbf{x} = 0$ eine Singularität.

Die Wärmeleitungsgleichung - Die Fundamentallösung

Mit Hilfe von $\Phi(x,t)$ lässt sich für das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{aligned}$$

eine Lösungsdarstellung wieder in der Form eines Faltungsintegral angeben:

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y},t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4t}} g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Herleitung der Fundamentallösung (nur für $x \in \mathbb{R}$):

Ist $u(x,t)$ eine Lösung von $u_t = \Delta u$, so ist $u(\lambda x, \lambda^2 t)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ebenfalls eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

Die Wärmeleitungsgleichung - Die Fundamentallösung

Ansatz:

Wir suchen daher eine spezielle Lösung in der Form

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{1/2}} v\left(\frac{x}{t^{1/2}}\right).$$

Man berechnet nun

$$\begin{aligned} u_t(x,t) &= -\frac{1}{2} t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot t^{-1/2} v', \\ u_x(x,t) &= t^{-1/2} \cdot t^{-1/2} \cdot v', \\ u_{xx}(x,t) &= t^{-3/2} \cdot v''. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = -\frac{1}{2} \cdot t^{-3/2} \cdot v - \frac{x}{2} \cdot t^{-2} \cdot v' - t^{-3/2} \cdot v'' = 0.$$

Die Wärmeleitungsgleichung - Die Fundamentallösung

Wir erhalten also mit $r = x/\sqrt{t}$ die Gleichung zweiter Ordnung

$$\frac{1}{2}v + \frac{r}{2}v' + v'' = 0.$$

Umschreiben ergibt

$$(v')' + \frac{1}{2}(rv)' = 0 \quad \Rightarrow \quad v' + \frac{1}{2}rv = c \in \mathbb{R}.$$

Nehmen wir nun folgende Grenzbeziehungen an

$$\lim_{r\to\infty} v(r) = \lim_{r\to\infty} v'(r) = 0,$$

so folgt $c = 0$ und die Gleichung lautet

$$v' = -\frac{1}{2}rv \quad \Rightarrow \quad v(r) = be^{-r^2/4}.$$

Eine explizite Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist damit

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Die Wärmeleitungsgleichung - Die Fundamentallösung

Weitere Lösungsdarstellungen mit Hilfe der Fundamentallösung:

1) Das inhomogene Anfangswertproblem mit homogenen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u = f \quad & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty), \\ u = 0 \quad & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

besitzt die Lösung

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x},t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-s) f(\mathbf{y},s)\, d\mathbf{y}\, ds \\ &= \int_0^t \frac{1}{(4\pi(t-s))^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}{4(t-s)}} f(\mathbf{y},s)\, d\mathbf{y}\, ds. \end{aligned}$$

Die Wärmeleitungsgleichung - Die Fundamentallösung

2) Duhamel'sches Prinzip:

Die Funktion $u(\mathbf{x}, t; s) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y}$ löst das Problem

$$\begin{array}{rcll} u_t(\cdot\,; s) - \Delta u(\cdot\,; s) & = & 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (s, \infty), \\ u(\cdot\,; s) & = & f(\cdot\,; s) & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = s\}. \end{array}$$

Man erhält dann die Lösung der inhomogenen Gleichung durch Integration über s:

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t u(\mathbf{x}, t; s)\, ds.$$

3) Das inhomogene Anfangswertproblem mit allgemeinen Anfangsbedingungen $u(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x})$ besitzt die Lösung

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) d\mathbf{y} ds.$$

Die Wärmeleitungsgleichung - Eigenschaften der Lösungen

Analog zur Laplacegleichung erfüllen auch Lösungen der Wärmeleitungsgleichung Mittelwertformeln, die allerdings weniger anschaulich sind:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt, $T > 0$ fest. Dann nennt man die Menge

$$\Omega_T := \Omega \times (0, T]$$

den parabolischen Zylinder und

$$\Gamma_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$$

den parabolischen Rand.

Für festes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ sei die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ gegeben durch

$$E(\mathbf{x}, t; r) := \{(\mathbf{y}, s) \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ s \leq t, \, \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \geq \frac{1}{r^n}\}.$$

Die Wärmeleitungsgleichung - Eigenschaften der Lösungen

Bemerkung

1) Der Rand von $E(\mathbf{x}, t; r)$ ist gerade eine Höhenlinie der Fundamentallösung $\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)$.

2) Man nennt die Menge $E(\mathbf{x}, t; r)$ auch Wärmekugel (heat ball).

Mit Hilfe von $E(\mathbf{x}, t; r)$ erhält man folgende Mittelwerteigenschaft:

Satz

Ist $u \in C_1^2(\Omega_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung, so gilt

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int\limits_{E(\mathbf{x},t;r)} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}{(t - s)^2} u(\mathbf{y}, s)\, d\mathbf{y} ds$$

für jede Menge $E(x, t; r) \subset \Omega_T$.

Die Wärmeleitungsgleichung - Eigenschaften der Lösungen

Aus Mittelwerteigenschaft kann man folgende Maximumprinzipien herleiten.

Satz

Sei $u \in C_1^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung in Ω_T. Dann gilt:

1) Das Maximum von $u(\mathbf{x}, t)$ liegt stets auf dem parabolischen Rand, d.h.

$$\max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{\Omega}_T} u(\mathbf{x}, t) = \max_{(\mathbf{x},t)\in\Gamma_T} u(\mathbf{x}, t).$$

2) Ist Ω zusammenhängend und existiert ein Punkt $(\mathbf{x}_0, t_0) \in \Omega_T$ mit

$$u(\mathbf{x}_0, t_0) = \max_{(\mathbf{x},t)\in\overline{\Omega}_T} u(\mathbf{x}, t)$$

so folgt, dass u auf $\overline{\Omega}_{t_0}$ konstant ist.

Wärmeleitungsgleichung - Eindeutigkeitsaussagen

Aus Maximumprinzipien kann man Eindeutigkeit herleiten.

Satz

Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \Omega_T, \\ u &= g \quad \text{auf } \Gamma_T. \end{aligned}$$

auf dem beschränkten Gebiet Ω mit stetigen Funktionen f und g besitzt maximal eine Lösung $u \in \mathcal{C}_1^2(\Omega_T) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega_T})$.

Beweis:

Sind u und $\tilde{u}$ zwei Lösungen, so lösen die beiden Funktionen

$$w_{1/2} = \pm(u - \tilde{u})$$

die homogene Wärmeleitungsgleichung mit homogenen Randbedingungen. Nach Maximumprinzip gilt nun, dass $w_{1/2} = 0$, d.h. wir haben $u = \tilde{u}$. $\square$

Wärmeleitungsgleichung - Eindeutigkeitsaussagen

Satz

Das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u &= g \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^n$ mit stetigen Fktn. f und g besitzt unter der zusätzlichen Wachstumsbedingung

$$|u(x,t)| \leq Ae^{a|x|^2} \qquad (A, a > 0)$$

maximal eine Lösung $u \in C_1^2(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$.

Bemerkung

In der Tat kann man zeigen, dass für das Cauchy–Problem

$$u_t = \Delta u \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T), \qquad u = 0 \text{ auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

unendlich viele Lösungen existieren. Nur die Nulllösung erfüllt die angegebene Wachstumsbedingung; alle anderen Lösungen wachsen rapide an.

Die Wellengleichung

Die Wellengleichung

In diesem Kapitel untersuchen wir die Wellengleichung

$$u_{tt} - \Delta u = 0$$

sowie die inhomogene Wellengleichung der Form

$$u_{tt} - \Delta u = f$$

in Verbindung mit geeigneten Anfangs– und Randbedingungen.

Hier bezeichnet $t > 0$ die Zeitvariable und $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, die Ortsvariable.

Wir suchen also eine Funktion $u : \overline{\Omega} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u = u(\mathbf{x}, t)$, wobei der Laplace–Operator auf die Ortsvariable $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ wirkt.

Für die inhomogene Gleichung bezeichnet die rechte Seite eine gegebene Funktion $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

Die Wellengleichung - Formel von d'Alembert

Wir untersuchen zunächst eine direkte Methode zur Lösung des eindimenisonalen Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u = g, u_t &= h \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

wobei g, h vorgegebene Anfangsbedingungen sind.

Beobachtung

Die Differentialgleichung läßt auf folgende Weise faktorisieren: Es gilt

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u = u_{tt} - u_{xx} = 0.$$

Setzen wir nun

$$v(x, t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x, t).$$

Die Wellengleichung - Formel von d'Alembert

Beobachtung (cont.)

so erhalten wir eine Transportgleichung mit kostanten Koeffizienten:

$$v_t(x,t) + v_x(x,t) = 0.$$

Die Lösung dieser Gleichung lautet

$$v(x,t) = a(x-t)$$

und erfüllt die Anfangsbedingung

$$v(x,0) = a(x).$$

Wegen

$$v(x,t) := \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right) u(x,t)$$

ist $u(x,t)$ demnach die Lösung der inhomogenen Transportgleichung

$$u_t - u_x = a(x-t).$$

Die Wellengleichung - Formel von d'Alembert

Beobachtung (cont.)

Nach den Methoden aus Kapitel 2 erhalten wir

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int_0^t a(x+(t-s)-s)ds + u(x+t,0) \\
&= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + u(x+t,0) \\
&= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} a(y)dy + g(x+t).
\end{aligned}
$$

Diese Lösung soll nun noch die Anfangsbedingung

$$u_t(x,0) = h(x)$$

erfüllen.

Die Wellengleichung - Formel von d'Alembert

Beobachtung (cont.)

Man berechnet

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\left(a(x+t) + a(x-t)\right) + g'(x+t)$$

und damit

$$u_t(x{,}0) = a(x) + g'(x) = h(x) \quad \Rightarrow \quad a(x) = h(x) - g'(x).$$

Also folgt

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \left(h(y) - g'(y)\right) dy + g(x+t) \\ &= \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy - \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}g(x-t) + g(x+t). \end{aligned}$$

Die Wellengleichung - Formel von d'Alembert

Beobachtung (cont.)

Wir erhalten aus der Beziehung

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy - \frac{1}{2}g(x+t) + \frac{1}{2}g(x-t) + g(x+t)$$

demnach

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy.$$

Diese Darstellung nennt man die Formel von d'Alembert.

Bemerkung

Damit $u(x,t)$ tatsächlich eine differenzierbare Lösung der Wellengleichung ist, müssen wir bezüglich der Anfangsbedingungen fordern, dass

$$g \in C^2(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad h \in C^1(\mathbb{R}).$$

Die Wellengleichung - Formel von d'Alembert

Beispiel zur Formel von d'Alembert

Wir betrachten das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 && \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty), \\ u = \sin x, \quad u_t &= \cos x && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Nach der Formel von d'Alembert ergibt sich

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \cos(y)dy \\ &= \frac{1}{2}(\sin(x+t) + \sin(x-t)) + \frac{1}{2}(\sin(x+t) - \sin(x-t)) \\ &= \sin(x+t). \end{aligned}$$

Die Wellengleichung - Reflexionsmethode

Reflektionsmethode für den Halbraum $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem auf dem Halbraum $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0, \infty), \\ u = g,\ u_t &= h \quad \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\} \\ u &= 0 \quad \text{auf } \{x = 0\} \times (0, \infty) \end{aligned}$$

mit vorgegebenen Funktionen g und h mit $g(0) = h(0) = 0$.

Idee:

Erweitere das Halbraumproblem auf ein Ganzraumproblem und verwende die Formel von d' Alembert.

Definiere eine Funktion $\tilde{u}(x, t)$ für $x \in \mathbb{R}$ und $t \geq 0$ durch

$$\tilde{u}(x, t) := \begin{cases} u(x, t) & (x \geq 0, t \geq 0), \\ -u(-x, t) & (x \leq 0, t \geq 0). \end{cases}$$

Die Wellengleichung - Reflexionsmethode

Reflektionsmethode für den Halbraum $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$

Analog werden die gegebenen Anfangsdaten reflektiert:

$$\tilde{g}(x) := \begin{cases} g(x) & (x \geq 0), \\ -g(-x) & (x \leq 0), \end{cases}$$

$$\tilde{h}(x) := \begin{cases} h(x) & (x \geq 0), \\ -h(-x) & (x \leq 0). \end{cases}$$

Damit erhalten wir für die Funktion $\tilde{u}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{xx} = 0 \quad & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ \tilde{u} = \tilde{g},\ \tilde{u}_t = \tilde{h} \quad & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

und nach der Lösungsformel nach d'Alembert gilt

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy.$$

Die Wellengleichung - Reflexionsmethode

Reflektionsmethode für den Halbraum $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$

Für $x \geq 0$ haben wir gerade die Lösung des Ausgangsproblems, i.e.

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,t).$$

Fallunterscheidung:

1) Ist $x \geq t \geq 0$, so folgt $x - t \geq 0$ und daher

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy \\ &= \frac{1}{2}\left(g(x+t) + g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(y)dy, \end{aligned}$$

denn für positive Argumente stimmen die Funktionen g und $\tilde{g}$ bzw. h und $\tilde{h}$ überein.

Die Wellengleichung - Reflexionsmethode

Reflektionsmethode für den Halbraum $\mathbb{R}_+ = \{x > 0\}$ (cont.)

2) Ist $0 \leq x \leq t$, so folgt $x - t \leq 0$ und daher

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left(\tilde{g}(x+t) + \tilde{g}(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \tilde{h}(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(-(x-t))\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{0} \tilde{h}(y)dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+t} \tilde{h}(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) - \frac{1}{2}\int_{0}^{t-x} h(y)dy + \frac{1}{2}\int_{0}^{x+t} h(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\left(g(x+t) - g(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int_{t-x}^{x+t} h(y)dy.
\end{aligned}
$$

Die Wellengleichung - Reflexionsmethode

Gesamtlösung

Wir erhalten also als Lösung des Ausgangsproblems

$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(g(x+t)+g(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} h(y)dy & x \geq t \geq 0, \\ \frac{1}{2}\left(g(x+t)-g(t-x)\right) + \frac{1}{2}\int\limits_{-x+t}^{x+t} h(y)dy & 0 \leq x \leq t. \end{cases}$$

Beispiel

Die Lösung des ARWP

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty), \\ u = 0,\ u_t = \sin x \quad & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t=0\} \\ u = 0 \quad & \text{auf } \{x=0\} \times (0,\infty) \end{aligned}$$

lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\cos(x-t) - \cos(x+t)).$$

Die Wellengleichung - Lösungen durch sphärische Mittelung

Wir betrachten nun den höherdimensionalen Fall $n \geq 2$ und suchen eine Lösung für das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times [0, \infty), \\ u = g, u_t &= h \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Idee

Leite durch geeignete sphärische Mittelungen eine vereinfachte Differentialgleichung ab, die dann eine explizite Lösungsformel für die höherdimensionale Wellengleichung liefert.
Für $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$ und $r > 0$ definieren wir den Mittelwert von $u(x, t)$ über die Sphäre $\partial B(x, r)$,

$$U(x; r, t) := \fint_{\partial B(x,r)} u(y, t) dS(y).$$

Die Wellengleichung - Lösungen durch sphärische Mittelung

Weiter sei

$$\begin{aligned} G(x;r) &:= \fint_{\partial B(x,r)} g(y)dS(y), \\ H(x;r) &:= \fint_{\partial B(x,r)} h(y)dS(y). \end{aligned}$$

Satz

Sei $x \in \mathbb{R}^n$ fest und u eine Lösung der obenstehenden Wellengleichung. Dann löst $U(x;r,t)$ die Euler–Poisson–Darboux Gleichung

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty),$$

$$U = G,\ U_t = H \quad \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}.$$

Die Wellengleichung - Lösungen durch sphärische Mittelung

Beweis:

Einer früheren Beobachtung folgend (Mittelwerteigenschaft harmonischer Fktn) gilt

$$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} \Delta u(y,t)\,dy.$$

Da u eine Lösung der Wellengleichung ist, folgt

$$U_r(x;r,t) = \frac{r}{n} \fint_{B(x,r)} u_{tt}(y,t)\,dy$$

und damit

$$r^{n-1} U_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int\limits_{B(x,r)} u_{tt}\,dy.$$

Die Wellengleichung - Lösungen durch sphärische Mittelung

Beweis (cont.):

Daraus folgt aber

$$(r^{n-1}U_r)_r = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} \fint_{\partial B(x,r)} u_{tt} dS = r^{n-1} U_{tt}.$$

Fassen wir dieses Ergebnis zusammen, so löst U in der Tat die Gleichung

$$U_{tt} - U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r = 0.$$

$\square$

Die Wellengleichung - Kirchhoffsche Formel für $n = 3$

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung lautet

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} (th(y) + g(y) + Dg(y) \cdot (y - x))\, dS(y) \quad (x \in \mathbb{R}^3, t > 0).$$

Herleitung über die Euler–Poisson–Darboux Gleichung:

Wir definieren

$$\begin{aligned} \tilde{U} &:= rU, \\ \tilde{G} &:= rG, \quad \tilde{H} := rH. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\tilde{U}_{tt} = rU_{tt} = r\left(U_{rr} + \frac{2}{r}U_r\right) = rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = \tilde{U}_{rr}.$$

Die Wellengleichung - Kirchhoffsche Formel für $n = 3$

Also löst $\tilde{U}$ das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0 \quad & \text{in } \mathbb{R}_+ \times (0,\infty), \\ \tilde{U} = \tilde{G},\ \tilde{U}_t = \tilde{H} \quad & \text{auf } \mathbb{R}_+ \times \{t = 0\}, \\ \tilde{U} = 0 \quad & \text{auf } \{r = 0\} \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Mit der Lösungsformel für das Halbraumproblem folgt für $0 \leq r \leq t$ die Darstellung

$$\tilde{U}(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)\right] + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy.$$

Da $U(x;r,t)$ aus $u(x,t)$ durch spärische Mittelung entsteht, gilt

$$u(x,t) = \lim_{r\to 0} U(x;r,t).$$

Die Wellengleichung - Kirchhoffsche Formel für $n = 3$

Mit der Definition von $\tilde{U}$ ergibt sich

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \lim_{r\to 0} \frac{\tilde{U}(x;r,t)}{r} \\
&= \lim_{r\to 0} \left(\frac{\tilde{G}(r+t) - \tilde{G}(t-r)}{2r} + \frac{1}{2r} \int_{-r+t}^{r+t} \tilde{H}(y)dy \right) \\
&= \tilde{G}'(t) + \tilde{H}(t).
\end{aligned}
$$

Verwendet man die Definitionen von G und H, so erhält man

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t}(tG(x;t)) + tH(x;t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left(t \fint_{\partial B(x,t)} g dS \right) + t \fint_{\partial B(x,t)} h dS.
\end{aligned}
$$

Die Wellengleichung - Kirchhoffsche Formel für $n = 3$

Nun gilt

$$\fint_{\partial B(x,t)} g(y)dS(y) = \fint_{\partial B(0,1)} g(x+tz)dS(z)$$

und damit

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\fint_{\partial B(x,t)} gdS\right) &= \fint_{\partial B(0,1)} Dg(x+tz)\cdot zdS(z) \\
&= \fint_{\partial B(x,t)} Dg(y)\cdot\left(\frac{y-x}{t}\right)dS(y).
\end{aligned}$$

Setzen wir dies in dies in die letzte Gleichung auf der vorgehenden Seite ein, so erhalten

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \fint_{\partial B(x,t)} tDg(y)\cdot\left(\frac{y-x}{t}\right)dS(y) + \fint_{\partial B(x,t)} g(y)dS(y) \\
&\quad + \fint_{\partial B(x,t)} thdS(y),
\end{aligned}$$

und dies ist gerade – nach Umsortierung – die Kirchhoffsche Formel.

Die Wellengleichung - Poissonsche Formel für $n = 2$

Die Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung lautet

$$u(x,t) = \frac{1}{2} \fint_{B(x,t)} \frac{tg(y) + t^2 h(y) + tDg(y) \cdot (y - x)}{(t^2 - |y - x|^2)^{1/2}} dy$$

für $x \in \mathbb{R}^2$ und $t > 0$.

Um diese Lösungsdarstellung abzuleiten, betrachtet man das dreidimensionale Anfangswertproblem und nimmt zusätzlich an, dass die Lösung nicht von der dritten Ortskoordinate x_3 abhängt.

Bemerkung

Nach einem zur Herleitung der Kirchhoffschen Formel analogen Prinzip, i.e. Verwendung der EPD Gleichung und geeignete Definition von $\tilde{U}$, lassen sich Lösungsformeln für das Anfangswertproblem der Wellengleichung im $\mathbb{R}^n$ ableiten.

Fourier–Methoden bei partiellen Differentialgleichungen

Fourier–Methoden

In diesem Kapitel untersuchen wir allgemeine Fourier–Methoden zur (approximativen) Lösung von Anfangs–, Randwert– und Anfangsrandwertaufgaben.

Beispiel: Fourier–Methoden bei gewöhnlichen DGLen

Gegeben sei das eindimensionale Randwertproblem:

$$\begin{aligned} -T\,\frac{d^2u}{dx^2} &= f(x), \quad 0 < x < l, \\ u(0) &= 0, \\ u(l) &= 0. \end{aligned}$$

Anwendung:
Die Lösung $u(x)$ beschreibt die Gleichgewichtslage eines eingespannten hängenden Seils mit Spannung T und extern angreifender Kraft $f(x)$.

Fourier–Methoden

Wir betrachten zunächst den **Spezialfall**:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit vorgegebenen Koeffizienten $c_1, \ldots, c_N$.
Die Inhomogenität $f(x)$ erfüllt insbesondere die homogenen Randbedingungen

$$f(0) = f(l) = 0,$$

und wir suchen daher eine Lösung des Randwertproblems in der Form

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Damit sind die homogenenen Randbedingungen für **alle** Lösungskoeffizienten $b_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R}$ erfüllt und wir versuchen die Koeffizienten b_n so zu bestimmen, dass $u(x)$ eine Lösung der vorgegebenen DGL ist.

Fourier–Methoden

Einsetzen in die DGL ergibt

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{Tn^2\pi^2}{l^2} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Für die Koeffizienten $b_1, \ldots, b_N$ gilt also

$$b_n = \frac{l^2 c_n}{Tn^2\pi^2}, \quad n = 1, \ldots, N,$$

und wir erhalten demnach als Lösung des Randwertproblems

$$u(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{l^2 c_n}{Tn^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Beispiel

Für die Inhomogenität $f(x) = \sin(\pi x) - 2\sin(2\pi x) + 5\sin(3\pi x)$ und $l = T = 1$ lautet die Lösung

$$u(x) = \frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x) - \frac{1}{2\pi^2}\sin(2\pi x) + \frac{5}{9\pi^2}\sin(3\pi x).$$

Fourier–Methoden – Der allgemeine Fall

Approximiere $f(x)$ durch eine endliche Fourier–Reihe $f_N(x)$, d.h.

$$f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit den Fourier–Koeffizienten

$$c_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx, \quad n = 1, \ldots, N.$$

Siehe Analysis II: Fourier–Reihen

Eine approximative Lösung des Randwertproblems mit Inhomogenität $f(x)$ ist dann gegeben durch

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{l^2 c_n}{T n^2 \pi^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Fourier–Methoden – Der allgemeine Fall

Beispiel

Wir betrachten das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\frac{d^2u}{dx^2} &= x, \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, \\ u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Die exakte Lösung läßt sich durch Integration berechnen:

$$u'(x) = -\frac{x^2}{2} + a \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{x^3}{6} + ax + b.$$

Mit den Randbedingungen $u(0) = u(1) = 0$ folgt:

$$u(x) = -\frac{x^3}{6} + \frac{1}{6}x = \frac{1}{6}x(1 - x^2).$$

Fourier–Methoden – Der allgemeine Fall

Wir berechnen nun zunächst die Fourier–Koeffizienten der Funktion

$$f(x) = x,$$

also

$$c_n = 2\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}, \quad n = 1,\dots,N.$$

Damit ergibt sich eine **approximative** Lösung in der Form

$$u_N(x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{N} \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\sin(n\pi x).$$

Wir erhalten etwa

$$u_4(x) = \frac{2}{\pi^3}\sin(\pi x) - \frac{1}{4\pi^3}\sin(2\pi x) + \frac{2}{27\pi^3}\sin(3\pi x) - \frac{1}{32\pi^3}\sin(4\pi x).$$

Fourier–Methoden – Der allgemeine Fall

Frage: Wie gut ist die approximative Lösung?

Antwort: Berechne die Fourier–Koeffizienten der exakten Lösung: mit

$$u(x) = \frac{1}{6}x(1-x^2)$$

folgt für die Fourier–Reihe

$$\tilde{u}_N(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(n\pi x)$$

die Darstellung der Fourier–Koeffizienten

$$a_n = 2\int_0^1 \frac{1}{6}x(1-x^2)\sin(n\pi x)\,dx = \frac{2(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}.$$

Dies sind aber gerade die (Fourier–)Koeffizienten der **approximativen** Lösung!

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten folgendes Anfangsrandwertproblem der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x,t) &&: \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leq T, \\ u(x,0) &= g(x) &&: \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0 &&: \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

und suchen eine Lösung in Form einer Fourier–Reihe, also

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Bemerkung

Da wir nur Sinus–Funktionen in der Fourier–Reihe verwenden, sind die vorgegebenen homogenen Randbedingungen automatisch erfüllt.

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Für die Koeffizienten der Fourier–Reihe gilt wiederum

$$a_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l u(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Gleichzeitig können wir die Inhomogenität $f(x,t)$ in einer Fourier–Reihe
darstellen, d.h.

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad c_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Wir berechnen nun die Orts– und Zeitableitungen des Lösungsansatzes

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

und erhalten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{da_n}{dt}(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \\
\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n\pi}{l} \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &= -\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \frac{n^2\pi^2}{l^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$u_t - u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t) \frac{n^2\pi^2}{l^2} \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),$$

und wir erhalten durch Gleichsetzen mit der Fourier–Reihe von $f(x,t)$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen der Form

$$\frac{da_n}{dt}(t) + a_n(t)\frac{n^2\pi^2}{l^2} = c_n(t).$$

Die Anfangsbedingungen $a_1(0), a_2(0), \ldots$ ergeben sich aus der Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l g(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)dx,$$

und daher

$$a_n(0) = b_n, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Damit haben wir ein Anfangswertproblem für ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen, das zudem entkoppelt ist.

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Die Lösung läßt sich also direkt angeben:

$$a_n(t) = b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} \cdot t\right) + \int\limits_0^t \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} \cdot (t-s)\right) c_n(s)\, ds.$$

Beispiel

Wir betrachten das homogene Anfangsrandwertproblem

$$\begin{array}{rcll} u_t & = & u_{xx} & : \quad 0 < x < 50,\ 0 < t \le T, \\ u(x,0) & = & 5 - \frac{1}{5}|x-25| & : \quad 0 \le x \le 50, \\ u(0,t) & = & u(50,t) = 0 & : \quad 0 \le t \le T. \end{array}$$

Die Berechnung der Fourier–Koeffizienten von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x-25|$ ergibt

$$b_n = \frac{1}{25} \int\limits_0^{50} \left(5 - \frac{1}{5}|x-25|\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx = \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Da wir eine homogene Wärmeleitungsgleichung betrachten, folgt

$$a_n(t) = \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right),$$

und die Lösung als Fourier–Reihe lautet

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2500} \cdot t\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right).$$

Beobachtung

1) Für festes $T > 0$ fallen die Fourier–Koeffizienten $a_n(t)$ der Lösung exponentiell schnell für $n \to \infty$ ab. Höhere Werte für n beschreiben gerade die höheren Frequenzen in der Lösung.

2) Für festes n fallen die Fourier–Koeffizienten exponentiell schnell für $t \to \infty$ ab. Der Abfall ist umso schneller, je größer n ist. Für große Zeiten beschreiben also wenige Terme der Fourier–Reihe die exakte Lösung sehr gut.

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Beispiel

Wir betrachten das inhomogene Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= x && : \quad 0 < x < 1,\, 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= 0 && : \quad 0 \le x \le 1, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 && : \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Dann gilt mit den Bezeichnungen von oben

$$\begin{aligned} b_n &= 0 \\ c_n(t) &= c_n = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}, \end{aligned}$$

und damit

$$a_n(t) = 2\int_0^t e^{-n^2\pi^2(t-s)}\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}\,ds = 2\frac{(-1)^{n+1}}{n^3\pi^3}\left(1 - e^{-n^2\pi^2 t}\right).$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Bis jetzt:

Anfangsrandwertprobleme mit homogenen Randbedingungen, d.h.

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x,t) &&: \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leq T, \\ u(x{,}0) &= g(x) &&: \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0 &&: \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Was passiert

1) bei (einseitig Neumannschen) Randbedingungen der Form

$$u(0,t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0;$$

2) bei periodischen Randbedingungen der Form

$$u(0,t) = u(l,t), \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(l,t).$$

Wie sehen die entsprechenden Fourier–Methoden aus?

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten zunächst das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= f(x,t) &&: \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leq T. \\
u(x,0) &= g(x) &&: \quad 0 \leq x \leq l, \\
u(0,t) &= 0 &&: \quad 0 \leq t \leq T, \\
u_x(l,t) &= 0 &&: \quad 0 \leq t \leq T.
\end{aligned}$$

Bemerkung

Beschreibt die Funktion $u(x,t)$ eine orts– und zeitabhängige Temperaturverteilung, so bedeutet

1) die Bedingung $u(0,t) = 0$, dass das linke Ende des Intervalls $[0,l]$ mit einem unendlich großen Eisbad in Kontakt steht,

2) die Bedingung $u_x(l,t) = 0$, dass am rechten Ende kein Wärmefluß nach rechts existiert, d.h. das rechte Ende des Intervalls ist perfekt wärmeisoliert.

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Die Fourier–Reihe

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

kann keine Lösung sein, denn unabhängig von den (zeitabhängigen) Koeffizienten gilt dann stets

$$u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Die im Problem vorgegebenen Randbedingungen

$$u(0,t) = 0, \qquad u_x(l,t) = 0$$

werden zum Beispiel durch die Funktion

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right)$$

erfüllt.

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Diese Funktion beschreibt gerade eine Viertel–Sinuswelle.

Funktionen mit höheren Frequenzen erhalten wir, wenn wir daran eine halbe Sinuswelle anhängen, also

$$\sin\left(\frac{\pi x}{2l} + \frac{k\pi x}{l}\right), \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Die Funktionen höherer Frequenzen sind dann von der Form

$$u(x,t) = \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}. \quad n \geq 2.$$

Ein Lösungsansatz für das vorgegebene Anfangsrandwertproblem, der automatisch die vorgegebenen Randbedingungen erfüllt, lautet damit

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right).$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Beispiel

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} &&: \quad 0 < x < 50,\ 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= 5 - \tfrac{1}{5}|x-25| &&: \quad 0 \le x \le 50, \\ u(0,t) &= 0 &&: \quad 0 \le t \le T, \\ u_x(50,t) &= 0 &&: \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Berechnung der Fourier–Koeffizienten von $g(x) = 5 - \frac{1}{5}|x-25|$ ergibt

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{25}\int_0^{50} \left(5 - \frac{1}{5}|x-25|\right) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{100}\right) dx \\ &= -\frac{80(-\sqrt{2}\sin(n\pi/2) + \sqrt{2}\cos(n\pi/2) - (-1)^n)}{\pi^2(2n-1)^2}. \end{aligned}$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Beispiel (cont.)

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2l}\right)$$

erhalten wir durch Einsetzen in die Wärmeleitungsgleichung und Koeffizientenvergleich mit der Fourier–Reihe von $g(x)$ die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da_n}{dt} + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4 \cdot 50^2} a_n &= 0 \\ a_n(0) &= b_n \qquad\qquad n = 1, 2, \ldots . \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet dann

$$a_n(t) = b_n e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2}{10000}t}.$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Beispiel

Sind beide Enden wärmeisoliert, so haben wir das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x,t) &&: \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leq T, \\ u(x,0) &= g(x) &&: \quad 0 \leq x \leq l, \\ u_x(0,t) &= 0 &&: \quad 0 \leq t \leq T, \\ u_x(l,t) &= 0 &&: \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Jetzt erfüllen die Funktionen

$$u(x,t) = 1, \qquad u(x,t) = \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

die vorgegebenen Neumannschen Randbedingungen.
Ein Lösungsansatz lautet damit

$$u(x,t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Beispiel

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} &&: \quad 0 < x < 50,\ 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= 5 - \tfrac{1}{5}|x-25| &&: \quad 0 \le x \le 50, \\ u_x(0,t) &= 0 &&: \quad 0 \le t \le T, \\ u_x(50,t) &= 0 &&: \quad 0 \le t \le T. \end{aligned}$$

Mit dem Lösungsansatz

$$u(x,t) = b_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

ergibt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\frac{db_0}{dt}(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2} b_n(t) \right) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) = 0.$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Beispiel (cont.)

Das System gewöhnlicher Differentialgleichungen lautet dann

$$\frac{db_0}{dt}(t) = 0, \qquad \frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{50^2} b_n(t) = 0.$$

Um die zugehörigen Anfangsbedingungen festzulegen, bestimmen wir die Fourier–Reihe der Anfangsbedingung $g(x)$, d.h.

$$g(x) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$$

mit den Fourier–Koeffizienten

$$d_0 = \frac{1}{50} \int_0^{50} g(x)\, dx, \quad d_n = \frac{2}{50} \int_0^{50} g(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx.$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Beispiel (cont.)

Man berechnet

$$d_0 = \frac{5}{2}, \qquad d_n = \frac{20(2\cos(n\pi/2) - 1 - (-1)^n)}{n^2\pi^2}.$$

Die Koeffizienten $b_0(t), b_1(t), \ldots$ ergeben sich damit als

$$b_n(t) = d_n e^{-\lambda_n t}$$

mit

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{2500},$$

und die Lösung lautet

$$u(x,t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\lambda_n t} \cos\left(\frac{n\pi x}{50}\right).$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Wir kommen nun zu periodischen Randbedingungen und dem Anfangsrandwertproblem auf dem Intervall $[-l, l]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x,t) &&: \quad -l < x < l,\ 0 < t \leq T, \\ u(x,0) &= g(x) &&: \quad -l \leq x \leq l, \\ u(-l,t) &= u(l,t) &&: \quad 0 \leq t \leq T, \\ u_x(-l,t) &= u_x(l,t) &&: \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Periodische Funktionen auf dem Intervall $[-l, l]$ sind

$$\psi(x) = \frac{1}{2}, \quad \psi(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad \psi(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Ein Lösungsansatz mit Hilfe von Fourier–Reihen ist damit

$$u(x,t) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n(t) \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + b_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right).$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Mit den Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} f(x,t) &= c_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + d_n(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right), \\ g(x) &= p_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(p_n\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right) + q_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right) \end{aligned}$$

ergeben sich die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{da_0}{dt}(t) &= c_0(t), \\ \frac{da_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2}a_n(t) &= c_n(t), \\ \frac{db_n}{dt}(t) + \frac{n^2\pi^2}{l^2}b_n(t) &= d_n(t). \end{aligned}$$

Fourier–Methoden für die Wärmeleitungsgleichung

Die zugehörigen Anfangsbedingungen lauten

$$a_0(0) = p_0, \quad a_n(0) = p_n, \quad b_n(0) = q_n.$$

Beispiel

Für das Anfangsrandwertproblem mit periodischen Randbedingungen

$$\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= \tfrac{1}{10}x(x^2-\pi^2) &&: \quad -\pi < x < \pi,\, 0 < t \le T,\\
u(x,0) &= 25 &&: \quad -\pi \le x \le \pi,\\
u(-\pi,t) &= u(\pi,t) &&: \quad 0 \le t \le T,\\
u_x(-\pi,t) &= u_x(\pi,t) &&: \quad 0 \le t \le T
\end{aligned}$$

ist die Fourier–Entwicklung der Lösung gegeben durch

$$u(x,t) = 25 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{12(-1)^n}{10n^5}\left(1 - e^{-n^2 t}\right)\sin(nx).$$

Fourier–Methoden für die Wellengleichung

Wir betrachten das Anfangsrandwertproblem

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= f(x,t) &&: \quad 0 < x < l,\ 0 < t \leq T, \\ u(x,0) &= g(x) &&: \quad 0 \leq x \leq l, \\ u_t(x,0) &= h(x) &&: \quad 0 \leq x \leq l, \\ u(0,t) &= u(l,t) = 0 &&: \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

und suchen eine Lösung in der Form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Die Fourier–Reihen für $f(x,t)$, $g(x)$ und $h(x)$ ergeben DGL's für die Lösungskoeffizienten $a_i(t)$, $i = 1,2,\ldots$.

Fourier–Methoden für die Wellengleichung

Beispiel

Die Lösung des Anfangsrandwertproblems

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= 0 &:&\quad 0 < x < l,\ 0 < t \leq T, \\
u(x,0) &= g(x) &:&\quad 0 \leq x \leq l, \\
u_t(x,0) &= h(x) &:&\quad 0 \leq x \leq l, \\
u(0,t) &= u(l,t) = 0 &:&\quad 0 \leq t \leq T
\end{aligned}
$$

ist gegeben durch

$$
u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ b_n \cos\left(\frac{n\pi}{l} t\right) + \frac{d_n l}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{l} t\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).
$$

Dabei sind b_n die Fourier–Koeffizienten der Entwicklung der vorgegeben Anfangsbedingung $u(x,0) = g(x)$ und d_n die entsprechenden Koeffizienten von $u_t(x,0) = h(x)$.

Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen

Numerische Lösung partieller Differentialgleichungen

Zur numerischen Lösung gibt es drei klassische Ansätze:

1) Finite–Differenzen
   Approximation auf regulären (strukturierten) Gittern, einfache Geometrien, häufig eindimensional im Ort, alle Typen

2) Finite–Volumen
   Mehrdimensionale Probleme auf unstrukturierten Gittern, vor allem
   hyperbolische Gleichungen

3) Finite–Elemente
   Mehrdimensionale Probleme auf unstrukturierten Gittern, komplizierte Geometrien, vor allem elliptische Gleichungen

Wir beschränken uns auf die Darstellung von Finiten–Differenzen– und Finite–Element–Methoden.

Die Methode der Finiten–Differenzen

Wir beschränken uns auf eindimensionale Probleme und die folgenden Anfangs– und Anfangsrandwertprobleme

1) Cauchy–Probleme für skalare Erhaltungsgleichungen, also

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

2) Randwertprobleme für die Poissongleichung, also

$$\begin{aligned} -u_{xx} &= f(x) \quad : \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

3) Anfangsrandwertprobleme für die Wärmeleitungsgleichung, also

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= f(x,t) \quad : \quad 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \\ u(x,0) &= g(x) \quad : \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \quad : \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned}$$

Die Methode der Finiten–Differenzen

Idee bei Finiten–Differenzen

Approximiere exakte Lösung nur an diskreten Punkten (dem Gitter):

$$u(x_i, t_j) \approx U(x_i, t_j) =: U_i^j$$

mit den diskreten Punkten

$$x_i := i \cdot h, \quad i \in \mathcal{Z}_x, \qquad t_j := j \cdot k, \quad j \in \mathcal{Z}_t$$

und den Orts– und Zeitschrittweiten h und k. Die Indexmengen $\mathcal{Z}_x$ und $\mathcal{Z}_t$ sind dabei endliche oder unendliche Teilmengen von $\mathcal{Z}$.

Beispiel

Für die Wärmeleitungsgleichung auf $[0,1] \times [0, T]$ setzen wir

$$x_i := i \cdot h, \quad i = 0, \ldots, n, \qquad t_j := j \cdot k, \quad j = 0, \ldots, m$$

mit den Orts– und Zeitschrittweiten $h := \frac{1}{n}$, $k := \frac{T}{m}$.

Die Methode der Finiten–Differenzen

Zur Berechnung der diskreten Werte U_i^j benötigen wir die Approximation von Ableitungen:

Beispiel

Wir approximieren die Ableitung $u_x(x,t)$ an der Stelle $(x,t) = (x_i, t_j)$:

1) Zentrale Differenzen

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h};$$

2) Vorwärtsdifferenz

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h};$$

3) Rückwärtsdifferenz

$$u_x(x_i, t_j) \approx \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h}.$$

Approximationsgüte von Finiten–Differenzen

Sei $u(x,t)$ eine hinreichend oft differenzierbare Funktion und (x_i, t_j) ein fester Punkt eines Gitters mit Orts– und Zeitschrittweite h und k.

Mittels einer Taylorentwicklung um (x_i, t_j) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
u(x_{i+1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j)\underbrace{(x_{i+1} - x_i)}_{=h} + \\
&\quad \frac{1}{2}u_{xx}(x_i, t_j)\underbrace{(x_{i+1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6}u_{xxx}(x_i, t_j)\underbrace{(x_{i+1} - x_i)^3}_{=h^3} + \ldots, \\
u(x_{i-1}, t_j) &= u(x_i, t_j) + u_x(x_i, t_j)\underbrace{(x_{i-1} - x_i)}_{=-h} + \\
&\quad \frac{1}{2}u_{xx}(x_i, t_j)\underbrace{(x_{i-1} - x_i)^2}_{=h^2} + \frac{1}{6}u_{xxx}(x_i, t_j)\underbrace{(x_{i-1} - x_i)^3}_{=-h^3} + \ldots.
\end{aligned}
$$

Approximationsgüte von Finiten–Differenzen

Wir erhalten damit

1) bei Zentralen Differenzen

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{2h} \right| = O(h^2)$$

$\Rightarrow$ Approximation zweiter Ordnung in h.

2) bei Vorwärtsdifferenzen

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

$\Rightarrow$ Approximation erster Ordnung in h.

3) bei Rückwärtsdifferenzen

$$\left| u_x(x_i, t_j) - \frac{u(x_i, t_j) - u(x_{i-1}, t_j)}{h} \right| = O(h)$$

$\Rightarrow$ Approximation erster Ordnung in h.

Finite–Differenzen für skalare Erhaltungsgleichungen

Wir betrachten das Cauchy–Problem

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0 \quad && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Mit den Notationen von oben ist ein numerisches Verfahren mit Hilfe von Finiten–Differenzen gegeben durch

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h}\Big(f(U_{i+1}^j) - f(U_{i-1}^j)\Big)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$U_i^0 = \frac{1}{h} \int_{x_i - h/2}^{x_i + h/2} u_0(x)\, dx.$$

Also: Zentrale Differenz im Ort, Vorwärtsdifferenz in der Zeit.

Finite–Differenzen für skalare Erhaltungsgleichungen

Beispiel

Wir betrachten das Problem

$$\begin{aligned} u_t + uu_x &= 0 \quad && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

mit

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & : \quad x \leq 0, \\ -1 & : \quad x > 0. \end{cases}$$

Die Anfangsbedingung ist gleichzeitig die Lösung für $t > 0$!

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h}\left(\frac{(U_{i+1}^j)^2}{2} - \frac{(U_{i-1}^j)^2}{2}\right), \qquad U_i^0 = \begin{cases} 1 & : \quad i < 0, \\ 0 & : \quad i = 0, \\ -1 & : \quad i > 0. \end{cases}$$

Fazit

Funktioniert nicht, Verfahren ist instabil.

Finite–Differenzen für skalare Erhaltungsgleichungen

Beispiel

Wir betrachten die lineare Advektionsgleichung

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= 0 \quad && \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ u &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\}. \end{aligned}$$

Zentrale Differenzen im Ort:

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{2h}\left(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j\right).$$

Funktioniert selbst bei einer linearen Gleichung nicht!

Upwind–Verfahren: funktioniert unter der CFL–Bedingung $k/h < 1$

$$U_i^{j+1} = U_i^j - \frac{k}{h}\left(U_i^j - U_{i-1}^j\right).$$

Lax–Friedrichs–Verfahren: funktioniert wie das Upwind–Verfahren

$$U_i^{j+1} = \frac{U_{i+1}^j + U_{i-1}^j}{2} - \frac{k}{2h}\left(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j\right).$$

Finite–Differenzen für die Poissongleichung

Wir betrachten jetzt Randwertprobleme für die Poissongleichung, also

$$\begin{aligned} -u_{xx} &= f(x) \qquad : \quad 0 < x < 1,\, 0 < t \leq T, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

Zunächst benötigen wir eine Approximation der zweiten Ableitung:

$$u_{xx}(x_i) \approx \frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2}.$$

Damit erhalten wir die diskreten Gleichungen

$$\frac{U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}}{h^2} = F_i, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

mit $h = 1/n$ und

$$F_i := f(x_i), \quad U_0 = U_n = 0.$$

Finite–Differenzen für die Poissongleichung

Setzen wir

$$\mathbf{x} = (U_1, \ldots, U_{n-1})^T, \qquad \mathbf{b} = (F_1, \ldots, F_{n-1})^T,$$

so erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

mit der Koeffizientenmatrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Fazit

Die numerische Lösung der Poissongleichung reduziert sich auf ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $U_1, \ldots, U_{n-1}$.

Finite–Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung

Zur numerischen von Anfangsrandwertproblemen der Form

$$\begin{array}{rcll} u_t & = & u_{xx} & : \quad 0 < x < 1,\, 0 < t \leq T, \\ u(x,0) & = & g(x) & : \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0,t) & = & u(1,t) = 0 & : \quad 0 \leq t \leq T \end{array}$$

müssen wir Diskretisierungen für die zweite Ableitung u_{xx} mit einer Differenzenapproximation für die Zeitableitung u_t kombinieren:

1) Setzen wir eine Vorwärtsdifferenz an, also

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k},$$

so erhalten wir das explizite Verfahren

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2}(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j).$$

Finite–Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung

2) Mit der Rückwärtsdifferenz

$$u_t(x_i, t_j) = \frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{k}$$

erhalten wir das implizite Verfahren

$$U_i^{j+1} = U_i^j + \frac{k}{h^2}(U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}).$$

Fazit

Zur Berechnung der Lösung zur Zeit t_{j+1} muß ein lineares Gleichungssystem gelöst werden!

3) Eine Konvexkombination beider Verfahren liefert die θ–Methode

$$\begin{aligned} U_i^{j+1} &= U_i^j + \frac{k}{h^2}\Big[\theta(U_{i+1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i-1}^{j+1}) \\ &\quad +(1-\theta)(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j)\Big]. \end{aligned}$$

Im Fall $\theta = \frac{1}{2}$ erhält man das Crank–Nicholson–Verfahren.

Finite–Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung

Bemerkungen

1) Das explizite Verfahren funktioniert nur unter der Bedingung

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

Man nennt diese Bedingung eine Stabilitätsbedingung.
Verdoppelt man also die Zahl der Gitterpunkte im Ort, muß man entsprechend mit einem vierfach kleineren Zeitschritt arbeiten.

2) Das implizite Verfahren ist für alle Werte von k und h stabil.

Zur Berechnung der Lösung muß man allerdings in jedem Zeitschritt ein lineares Gleichungssystem lösen.

3) Bei Verfahren sind erster Ordnung in der Zeit und zweiter Ordnung im Ort, d.h. für den Fehler $e(T)$ zwischen der exakten und der numerischen Lösung zu einer festen Zeit $T > 0$ gilt

$$e(T) = O(k) + O(h^2).$$

Finite–Differenzen für die Wärmeleitungsgleichung

Bemerkungen (cont.)

4) Die Stabilitätsbedingung für die θ–Methode für $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$ lautet

$$\frac{k}{h^2} \leq \frac{1}{2}(1 - 2\theta)^{-1}.$$

Für $\theta \geq \frac{1}{2}$ ist die θ–Methode stets stabil.

5) Das Verfahren von Crank–Nicholson ist zweiter Ordnung in Ort **und** Zeit, d.h. es gilt

$$e(T) = O(k^2) + O(h^2).$$

Für keinen anderen Wert von θ gilt ein entsprechendes Resultat.

Daher ist das Verfahren von Crank–Nicholson ein spezielles Verfahren für die Wärmeleitungsgleichung und wird häufig bei numerischen Berechnungen verwendet.

Die Methode der Finiten–Elemente

Wir beschränken uns auf das eindimensionale Randwertproblem:

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) &= f(x), \quad 0 < x < l, \quad k(x) > 0 \\
u(0) &= u(l) = 0.
\end{aligned}
$$

FE–Methoden basieren auf drei grundlegenden Ideen:

1) Man reformuliert das gegebene Problem in einer schwachen Form oder auch Variationsformulierung. Dadurch reduziert sich das Problem auf unendlich viele algebraische Gleichungen in einem Vektorraum, dessen Elemente bereits die vorgegebenen Randwerte erfüllen.

2) Die Galerkin Methode reduziert das Problem auf Gleichungen in einem endlich–dimensionalen Finite–Element–Raum, der eine endliche Zahl von Basiselementen besitzt.

Die Methode der Finiten–Elemente

3) Als Basis des endlich–dimensionalen FE–Raums wählt man stückweise Polynome und erhält damit ein lineares Gleichungssystem mit einer dünn besetzten Koeffizientenmatrix.

Die schwache Form des Randwertproblems

Sei V gegeben durch

$$V = \{v \in \mathcal{C}^2[0, l] \ : \ v(0) = v(l) = 0\}.$$

Wir multiplizieren nun die gegebene Poissongleichung mit einer Funktion $v \in V$ und integrieren über den Ortsraum $[0, l]$:

$$-\int_0^l \frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) v(x)\, dx = \int_0^l f(x)v(x)\, dx.$$

Mittels partieller Integration erhalten wir

$$\int_0^l k(x)\, \frac{du}{dx}(x)\, \frac{dv}{x}(x)\, dx = \int_0^l f(x)\, v(x)\, dx.$$

Die Methode der Finiten–Elemente

Die schwache Form des Randwertproblems (cont.)

Da $v \in V$ eine beliebige Funktion ist, lautet die schwache Form:

Finde ein $u \in V$, sodass die Beziehung

$$\int_0^l k(x)\,\frac{du}{dx}(x)\,\frac{dv}{x}(x)\,dx = \int_0^l f(x)v(x)\,dx$$

für alle $v \in V$ erfüllt ist.

Man kann nun zeigen:
Erfüllt $u \in V$ die Differentialgleichung

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) = f(x),$$

so erfüllt u auch die schwache Form von oben, und wichtiger, es gilt ebenfalls die Umkehrung.

Die Galerkin–Methode

Definieren wir

$$a(u,v) := \int_0^l k(x)\,\frac{du}{dx}(x)\,\frac{dv}{x}(x)\,dx,$$

so ist $a(\cdot,\cdot)$ eine symmetrische Bilinearform, die ein inneres Produkt im Vektorraum V darstellt.

Mit Hilfe der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ und dem Skalarprodukt

$$(f,v) = \int_0^l f(x)\,v(x)\,dx$$

läßt sich die schwache Form folgendermaßen schreiben:

Finde ein $u \in V$, sodass $a(u,v) = (f,v)$ für alle $v \in V$.

Die Galerkin–Methode

Die Idee der Galerkinmethode ist nun den Vektorraum V durch einen endlich–dimensionalen Raum V_n, den sogenannten Finite–Element–Raum, zu approximieren und dort folgendes Problem zu lösen:

$$\text{Finde ein } v_n \in V_n, \text{ sodass } a(v_n, v) = (f, v) \text{ für alle } v \in V_n.$$

Dieses Problem läßt sich auf ein lineares Gleichungssystem reduzieren:

Sei $\{\Phi_1, \dots, \Phi_n\}$ eine Basis von V_n. Dann besitzt die Lösung v_n die Darstellung

$$v_n = \sum_{j=1}^{n} u_j \Phi_j.$$

Setzen wir dies in die schwache Form ein, so gilt

$$a\left(\sum_{j=1}^{n} u_j \Phi_j, \Phi_i\right) = (f, \Phi_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Die Galerkin–Methode

Aufgrund der Bilinearität von $a(\cdot,\cdot)$ folgt

$$\sum_{j=1}^{n} a(\Phi_j,\Phi_i)u_j = (f,\Phi_i), \quad i = 1,\dots,n.$$

Setzen wir für $i = 1,\dots,n$

$$a_{ij} = a(\Phi_j,\Phi_i), \quad f_i = (f,\Phi_i),$$

so ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{u} = \mathbf{f}$$

mit der Steifigkeitsmatrix **A** und dem Lösungsvektor

$$\mathbf{u} = (u_1,\dots,u_n)^T$$

mit den zu bestimmenden Koeffizienten $u_1,\dots,u_n$.

Approximation der stückweise Polynome

Zur Konstruktion von FE–Räumen machen wir folgende Vorüberlegungen:

1) Am besten wären FE–Räume V_n, für die man eine Orthogonalbasis aufstellen kann. Dann wäre die Steifigkeitsmatrix eine Diagonalmatrix. Dies ist aber im Allgemeinen nicht möglich.
2) Findet man keine Orthogonalbasis, so sollten Steifigkeitsmatrix und die rechte Seite einfach zu berechnen sein.
3) Die Basis von V_n sollte fast orthogonal sein, denn dann wäre die Steifigkeitsmatrix nahe bei einer Diagonalmatrix und damit dünn besetzt.
4) Die exakte Lösung u des Problems sollte möglichst gut durch ein Element aus V_n approximiert werden können und im Grenzwert $n \to \infty$ sollte die Approximation beliebig gut werden.

Daher: Approximation durch stückweise Polynome, zum Beispiel durch eine stückweise lineare Funktion.