Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Präsenzaufgaben

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \sin(x)\,t && 0 < x < \pi\,,\ 0 < t\,,\\ u(x,0) &= 4\sin(3x) + \tfrac{x}{\pi} && 0 \le x \le \pi,\\ u(0,t) &= \phi_1(t) = 0 && 0 \le t,\\ u(\pi,t) &= \phi_2(t) = 1 && 0 \le t. \end{aligned}$$

Hinweis: Homogenisieren Sie zunächst die Randbedingungen, indem Sie die Funktion

$$v(x,t) = u(x,t) - \phi_1(t) - \frac{x-a}{b-a}\left(\phi_2(t) - \phi_1(t)\right)$$

mit $a = 0$ und $b = \pi$ einführen und in der Aufgabenstellung die u–Ausdrücke durch geeignete v–Ausdrücke ersetzt. Man erhält z.B.

$$u_t = v_t + \dot{\phi}_1 + \frac{x-a}{b-a}\left(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_1\right).$$

Lösung:

Schritt 1: Homogenisieren der Randbedingungen

$$v(x,t) = u(x,t) - \varphi_1(t) - \frac{x-0}{\pi-0}(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)) = u(x,t) - \frac{x}{\pi}$$

Neue ARWA:

$$\begin{aligned} v_t - v_{xx} &= \sin(x)\,t\\ v(x,0) &= u(x,0) - \frac{x}{\pi} = 4\sin(3x)\\ v(0,t) &= v(\pi,t) = 0 \end{aligned}$$

Schritt 2: Lösung der homogenen ARWA

Mit $\omega = \frac{\pi}{L} = 1$ und $c = 1$ gilt

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(n\omega x)$$

Löse die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) = c_n(t),\ \ a_n(0) = b_n$$

b_n : Fourier Koeffizienten der ungeraden, $2L-$ periodischen Fortsetzung von $v(x,0)$:

$$4\sin(3x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

Also $b_n = 0, \forall n \neq 3, \qquad b_3 = 4\,.$

$c_n(t)$: Fourier Koeffizienten der ungeraden, $2L-$ periodischen Fortsetzung von $h(x,t) = \sin(x)\,t$:

$$\sin(x)\,t \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(nx)$$

Also $c_n(t) \equiv 0, \forall n \neq 1, \qquad c_1(t) = t\,.$

<u>Für $n \notin \{1,3\}$</u> erhalten wir die Anfangswertaufgabe

$\dot a_n(t) + n^2 a_n(t) = c_n(t) = 0,\; a_n(0) = b_n = 0$

mit der Lösung $a_n(t) \equiv 0\,.$

<u>Für $n = 1$:</u>

$\dot a_1(t) + 1^2 a_1(t) = c_1(t) = t,\; a_1(0) = b_1 = 0$

Die zugehörige homogene Differentialgleichung

$\dot a_{1h}(t) + a_{1h}(t) ==$ wird offensichtlich von e^{-t} gelöst.

Eine partikuläre Lösung der inhomogenen Aufgabe für a_1 erhält man durch den Ansatz

$a_{1p}(t) = \alpha + \beta t$

mit dem Ergebnis $a_{1p}(t) = t - 1$. Also ist

$a_1(t) = \gamma e^{-t} + t - 1 \qquad$ und $\qquad a_1(0) = \gamma e^0 + 0 - 1 = 0 \Longrightarrow \gamma = 1$

$\Longrightarrow \quad \boxed{a_1(t) = e^{-t} + t - 1}$

<u>Für $n = 3$:</u>

$\dot a_3(t) + 3^2 a_3(t) = c_3(t) = 0,\; a_3(0) = b_3 = 4$

$\Longrightarrow a_3(t) = \tilde\gamma e^{-9t} \qquad$ und $\qquad a_3(0) = \tilde\gamma e^0 = 4$

Also $\boxed{a_3(t) = 4e^{-9t}}$

$$\begin{aligned} v(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_n(t)\sin(n\omega x) \;=\; a_1(t)\sin(x) \;+\; a_3(t)\sin(3x) \\ &= \big(e^{-t} + t - 1\big)\sin(x) \;+\; 4e^{-9t}\sin(3x) \end{aligned}$$

Schritt 3: Lösungen zusammensetzen

Die Lösung des ursprüglichen Problems ist

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{x}{\pi} = 4e^{-9t}\sin(3x) + \,(e^{-t} + t - 1)\sin x + \,\frac{x}{\pi}.$$