Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 6, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Geben Sie eine Reihendarstellung für die Lösung des folgenden Neumann Problems an.

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), & 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0 & t > 0. \end{aligned}$$

b) Lösen Sie die Anfangsrandwertaufgabe aus a) mit $g(x) = 1 + \cos(2\pi x)$.

Lösung:

a) Kurze Version: Aus der Vorlesung wissen wir, dass der Ansatz $u_k(x,t) = v_k(x) \cdot w_k(t)$ mit $L = 1$ zu zu

$$v_k(x) = \cos(k\pi x), \qquad \text{und} \qquad w_k(t) = e^{-k^2\pi^2 t}, \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

führt.

Ganz lange Version: Der Ansatz $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$ *liefert:*

$v'' = \lambda\, v, \quad \dot{w} = \lambda w, \quad v'(0) = v'(1) = 0\,.$

Fallunterscheidung unter der Voraussetzung, dass die Lösung nicht identisch verschwindet:

$$\begin{aligned}
\lambda = 0 &\Longrightarrow v(x) = a_0 + b_0 x, \quad v' = b_0 = 0 \\
&\Longrightarrow v_0(x) = a_0\,. \\
\lambda > 0 &\Longrightarrow v(x) = ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x} \\
&\qquad v'(0) = 0 \Longleftrightarrow a = b \\
&\qquad v'(1) = 0 \Longleftrightarrow a\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}) = 0 \\
&\qquad \Longleftrightarrow (u \equiv 0) \vee (e^{\sqrt{\lambda}} = e^{-\sqrt{\lambda}} \Longleftrightarrow \lambda = 0) \qquad \textit{Widerspruch !} \\
\lambda < 0 &\Longrightarrow v(x) = a\cos(\sqrt{-\lambda}\,x) + b\sin(\sqrt{-\lambda}\,x) \\
&\qquad v'(x) = (\sqrt{-\lambda})(-a\sin(\sqrt{-\lambda}\,x) + b\cos(\sqrt{-\lambda}\,x) \\
&\qquad v'(0) = 0 \Longleftrightarrow b = 0 \\
&\qquad v'(1) = 0 \Longleftrightarrow (u \equiv 0) \vee (\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \Longleftrightarrow \lambda_k \ = \ -k^2\pi^2).
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also

$$v_k(x) = \cos(k\pi x), \quad k \in \mathbb{N}_0 .$$

Für die Zeitkomponente rechnet man leicht nach

$$w_k(t) = e^{-k^2\pi^2 t}, \quad k \in \mathbb{N}_0 .$$

Als Reihendarstellung für die Lösung hat man also

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2\pi^2 t} \cos(k\pi x) .$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten setzt man g gerade und $2-$ periodisch fort und bestimmt die Fourierkoeffizienten

$$a_k = 2 \int_0^1 g(x) \cos(k\pi x)\, dx .$$

b) $g(x) = 1 + \cos(2\pi x) \Longrightarrow a_0 = 2,\ a_2 = 1,\ a_k = 0$ sonst.
$u(x,t) = 1 + e^{-4\pi^2 t} \cos(2\pi x)$.

Aufgabe 2)

Bestimmen Sie mit Hilfe des Produktansatzes $u(x,t) = v(x)w(t)$ eine Lösung der Anfangs-randwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 9u_{xx} &= 0 \qquad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= 3 \cdot \sin(6x), \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ u_t(x,0) &= \pi x - 2x^2, \qquad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, \\ u(0,t) &= u(\frac{\pi}{2}, t) = 0 \qquad t \ge 0. \end{aligned}$$

Lösung:

Ein Produktansatz der Form $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$ liefert die bekannte RWA

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda, \; v(0) = v(\tfrac{\pi}{2}) = 0$$

Wegen $v(0) = v(\frac{\pi}{2}) = 0$ erhält man nur für $\boxed{\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = (2k)^2}$ nichttriviale Lösungen, und zwar: $v_k(x) = \sin(2kx)$. **[1 Punkt]**

Die Differentialgleichung für w_k lautet somit:
$w_k''(t) = -9\lambda_k \cdot w_k(t) \iff$

mit den Lösungen $w_k(t) = a_k \cos(6kt) + b_k \sin(6kt)$.

Wir erhalten also

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(6kt) + b_k \sin(6kt)) \sin(2kx)}$$

Zu erfüllen sind noch die Anfangsbedingungen. Aus

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(2kx) \stackrel{!}{=} 3\sin(6x) .$$

folgt $\boxed{a_3 = 3, \; a_k = 0 \; \forall k \neq 3 .}$ **[2 Punkte]**

Wegen $u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-6k\, a_k \sin(6kt) + 6k\, b_k \cos(6kt)) \sin(2kx)$

lautet die zweite Anfangsbedingung

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} 6k\, b_k \sin(2kx) \stackrel{!}{=} \pi x - 2x^2 \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Wir bestimmen die Fourier-Koeffizienten der ungerade, $\pi-$ periodisch fortgesetzten rechten

Seite:

$$\begin{aligned} B_k &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi x \;-\; 2x^2) \sin(2kx) dx \quad \textbf{[1 Punkt]} \\ &= \frac{4}{\pi}\; (\pi x \;-\; 2x^2) \frac{-\cos(2kx)}{2k} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi \;-\; 4x) \frac{-\cos(2kx)}{2k}\, dx \\ &= \frac{4}{2k\pi}\; (\pi \;-\; 4x) \frac{\sin(2kx)}{2k} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{4}{2k\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -4\, \frac{\sin(2kx)}{2k}\, dx \\ &= -\frac{4}{k^2\pi}\; \frac{\cos(2kx)}{2k} \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2(1-\cos(k\pi))}{k^3\pi} \quad \textbf{[3 Punkte]} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir $\boxed{b_k == \tfrac{B_k}{6k} \;=\; \dfrac{1-\cos(k\pi)}{3k^4\pi}\,.}$ **[1 Punkt]**

und

$$\boxed{u(x,t) = 3\cos(18t)\sin(6x) \;+\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos(k\pi)}{3k^4\pi}\; \sin(\,6kt)\; \sin(2kx)} \quad \textbf{[1 Punkt]}$$