Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Sei u die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{array}{rcll} \Delta u & = & -1 & |x| < 1, |y| < 1, \\ u(x,y) & = & 0 & |x| = 1 \text{ oder } |y| = 1 \end{array}$$

und $v(x,y) \;=\; u(x,y) + \dfrac{1}{4}(x^2+y^2)\,.$

Zeigen Sie, dass $v(x,y)$ die Laplace-Gleichung löst, und bestimmen Sie eine obere und eine untere Schranke für $u(0,0)$.

b) Sei $u(x,y)$ eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \Delta\, u \;&=\; 0, \qquad \text{in } \Omega :=]0,2[\times]0,1[\\ u(x,y) \;&=\; 3x^2 \qquad\qquad \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Entscheiden Sie, ohne u zu berechnen, für jede der folgenden Aussagen, ob sie zutreffend ist. Begründen Sie Ihre Antworten.

- Es gilt $\max_{(x,y)\in\bar\Omega} u(x,y) \;=\; 2\,.$
- Es gilt $\min_{(x,y)\in\bar\Omega} u(x,y) \;=\; 0\,.$
- $u(x,y) = 3x^2 \;-\; 3y^2$ ist eine Lösung der Randwertaufgabe.

Lösung :

a) Es gilt

$$\begin{aligned} v_{xx} + v_{yy} \;&=\; u_{xx} + \left(\frac{1}{4}(x^2+y^2)\right)_{xx} + u_{yy} + \left(\frac{1}{4}(x^2+y^2)\right)_{yy} \\ &=\; \Delta u + \frac{1}{4}(x^2)_{xx} + \frac{1}{4}(y^2)_{yy} = \;-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \;=\; 0\,. \end{aligned}$$

Die Funktion v erfüllt also die Laplace–Gleichung. Sie nimmt ihr Minimum und Maximum auf dem Rand des Rechtecks $[-1,1]\times[-1,1]$ an. Dort gilt

$v(x,y) \;=\; u(x,y) + \frac{1}{4}(x^2+y^2) \;\leq\; 0 + \frac{1}{4}(1^2+1^2) \;=\; \frac{1}{2}\,.$
und
$v(x,y) \;\geq\; 0 + \frac{1}{4}$ (es gilt stets $|x|$ oder $|y| = 1\,.$)

Also gilt im gesamten Rechteck $\frac{1}{4} \;\leq\; v(x,y) \;\leq\; \frac{1}{2}\,.$

Damit erhalten wir $u(0,0) \;=\; v(0,0) \;\in\; [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]\,.$

b) Die erste Aussage ist falsch, da zum Beispiel $u(1,0) = 3 > 2$ gilt.

Die zweite Aussage folgt aus dem Maximumprinzip .

$u(x,y) = 3x^2 - 3y^2$ ist zwar eine Lösung der Differentialgleichung , erfüllt aber nicht die Randbedingungen.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie alle rotationssymmetrischen Lösungen der folgenden Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{für } 1 < x^2+y^2 < 9, \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 1, \\ u(x,y) &= 2 \quad \text{auf } x^2+y^2 = 9. \end{aligned}$$

Hinweise: Die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten lautet $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$.
Rotationssymmetrisch heißt unabhänging von ϕ

b) Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Aufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{für } 0 \le x^2+y^2 \le 9, \\ u(x,y) &= \frac{x}{9}(x-y) \quad \text{auf } x^2+y^2 = 9\,. \end{aligned}$$

Hinweise: Verwenden Sie Polarkoordinaten und einen geeigneten Produktansatz! Die Lösung ist NICHT rotationssymmetrisch!

$\cos(2\phi) = 2\cos^2(\phi) - 1$, $\sin(2\phi) = 2\sin(\phi)\cos(\phi)$.

Verwenden Sie zur Lösung einer Differentialgleichung der Form $r^2 v''(r) + \alpha r v'(r) - \beta v(r) = 0$ *mit* $\beta \neq 0$ *den Ansatz* $v(r) = r^m$.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2:

a) Wie in der Vorlesung erhält man für rotationssymmetrische Probleme mit $v(r) := u(x(r), y(r))$, $w := v'$ und der rechten Seite $-f(r)$:

$$\begin{aligned} v'' + \frac{2-1}{r}v' &= -f(r) = -r^{-1}\,, \Longrightarrow w' + \frac{1}{r}w = -r^{-1} \Longrightarrow w_h = \alpha/r, \\ w_p = \alpha(r)/r\,, &\Longrightarrow \alpha'(r)/r = -1/r \Longrightarrow \alpha'(r) = -1 \Longrightarrow \alpha(r) = -r + c \\ &\Longrightarrow w(r) = -1 + \alpha/r \Longrightarrow v(r) = \alpha\ln(r) - r + \beta \\ &\Longrightarrow u(x,y) = \alpha\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) - \sqrt{x^2+y^2} + \beta \end{aligned}$$

Die Randdaten liefern für $x^2 + y^2 = 1$:

$$u(x,y) = -1 + \beta = 1 \Longrightarrow \beta = 2$$

und für $x^2 + y^2 = 9$

$$u(x,y) = \alpha\ln(3) - 3 + 2 = 2 \Longrightarrow \alpha = 3/\ln(3)$$

b) **Kurzversion:** Aus der Vorlesung/Hörsaalübung kennen wir die allgemeine Lösung:

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) \ + \sum_k (c_k r^{-k} \ + \ d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) \ + \ b_k \sin(k\phi))}$$

Lange Version: *Der Produktansatz:* $u = v(r) \cdot w(\phi)$ *ergibt eingesetzt in die Laplacegleichung in Polarkoordinaten*

$$r^2 u_{rr} \ + \ r u_r \ + \ u_{\phi\phi} = 0$$

$$r^2 v'' w + r v' w + v w'' = 0 \implies \frac{r^2 v'' + r v'}{v} \ = -\frac{w''}{w} = \lambda$$

Die Lösungen von $w''/w = -\lambda$ *hängen zwar von dem Vorzeichen von* λ *ab, hier kommen aber nur* 2π *periodische Lösungen in Frage:*

$$w_k(\phi) = c_1 \cos(k\phi) + c_2 \sin(k\phi), \qquad \lambda = k^2 \quad k \in \mathbb{N}_0$$

Für v *erhalten wir dann die Eulersche Differetialgleichung*

$$r^2 v'' + r v' - k^2 v = 0.$$

Für $k = 0$ *erhält man (analog zu Teil a) die Lösung* $v_0 = a_0 + b_0 \ln(r)$ *.*

Für $k \neq 0$ *liefert der Ansatz* $v = r^m$ *die beiden Lösungen* $v_1 = r^k$ *und* $v_2 = r^{-k}$ *.*

Da die Lösung in einem Kreis um Null definiert sein sollen, also insbesondere beschränkt bleiben sollen, kommen die negativen Potenzen und der $\ln -$ Term nicht in Frage. Insgesamt erhalten wir die Lösungsdarstellung:

$$u(r,\phi) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_1 \cos(k\phi) + c_2 \sin(k\phi)\right) r^k \,.$$

Die Randdaten liefern noch die Bedingung

$$\begin{aligned} u(3,\phi) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_1 \cos(k\phi) + c_2 \sin(k\phi)\right) 3^k \\ &= \frac{3\cos\phi}{9} \left(3\cos\phi - 3\sin\phi\right) = \cos^2(\phi) - \sin(\phi)\cos(\phi) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \cos(2\phi) - \sin(2\phi)\right) \,. \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt dann die Lösung

$$u(r,\phi) = \frac{1}{2} \ + \ \frac{r^2}{18} \cos(2\phi) \ - \ \frac{r^2}{18} \sin(2\phi) \,.$$