Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u_{xx} + 4u_{xt} + u_{tt} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

a) Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch).

b) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf Diagonalform $\alpha \cdot \tilde{u}_{\eta\eta} + \beta \tilde{u}_{\tau\tau} = 0$.

c) Wie hängen die neuen Koordinaten η, τ von den alten Koordinaten t, x ab?

Lösung:

$$u_{tt} + 4u_{xt} + u_{xx} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

a) Aus

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = -3$$

folgt, dass es sich um eine hyperbolische Differentialgleichung handelt.

b) Eigenwerte von A : $\quad (1-\lambda)^2 - 4 = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = 3$

Als Diagonalform erhält man also

$$3\tilde{u}_{\eta\eta} - \tilde{u}_{\tau\tau} = 0$$

(Um die Normalform zu erhalten, müsste man eine weitere Substitution durchführen $\tilde{t} = \tau$, $\tilde{x} = \frac{\eta}{\sqrt{3}}$.)

c) Normierte Eigenvektoren von A:

$$(A - \lambda_1 I)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Orthogonalitätseigenschaft bzw. eine analoge Rechnung für λ_2 ergibt

$$(A - \lambda_2 I)w = 0 \Longrightarrow w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Damit erhält man die Transformationsmatrix und die neuen Koordinaten

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tau \\ \eta \end{pmatrix} = S^T \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}$$

also

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{2}} (t - x), \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}} (t + x).$$

Aufgabe 2:

Aus der Vorlesung kennen Sie die Formel für die Lösung der Anfangswertaufgabe für die (homogene) Wellengleichung.

Die Funktion

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

löst die folgende Anfangswertaufgabe

$$\tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} = h(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = 0\,. \tag{2}$$

(Beweis: Leibniz-Formel für die Ableitung parameterabhängiger Integrale)

Zu lösen sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 6x\sin t, && x\in\mathbb{R},\, t>0\\ u(x,0) &= x,\, x\in\mathbb{R}, && u_t(x,0) = \sin(x),\, x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

a) Berechnen Sie eine Lösung $\tilde{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - 4\tilde{u}_{xx} &= 6x\sin t, && x\in\mathbb{R},\, t>0\\ \tilde{u}(x,0) &= 0,\, x\in\mathbb{R}, && \tilde{u}_t(x,0) = 0,\, x\in\mathbb{R}\end{aligned}$$

b) Berechnen Sie eine Lösung $\hat{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \hat{u}_{tt} - 4\hat{u}_{xx} &= 0, && x\in\mathbb{R},\, t>0\\ \hat{u}(x,0) &= x,\, x\in\mathbb{R}, && \hat{u}_t(x,0) = \sin(x),\, x\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

c) Zeigen Sie durch einsetzen von u in die Differentialgleichung und Überprüfung der Anfangswerte, dass $u = \tilde{u} + \hat{u}$ die Anfangswertaufgabe (2) löst.

Lösung:

a) Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit homogenen Anfangswerten

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x,t) &= \frac{1}{4}\int_0^t \int_{x+2(\tau-t)}^{x-2(\tau-t)} 6\omega\,\sin(\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau = \frac{3}{4}\int_0^t \sin(\tau)\,\left[\omega^2\right]_{x+2(\tau-t)}^{x-2(\tau-t)}\mathrm{d}\tau\\ &= \frac{3}{4}\int_0^t \sin(\tau)\,(-8x(\tau-t)\mathrm{d}\tau = 6x\int_0^t t\sin(\tau) - \tau\sin(\tau)\mathrm{d}\tau\\ &= 6xt(1-cos(t)) + 6x\left[\tau\cos(\tau)\right]_0^t - 6x\int_0^t \cos(\tau)\mathrm{d}\tau = 6x(t-\sin t)\,.\end{aligned}$$

b) Lösung der homogenen Differentialgleichung mit den inhomogenen Anfangswerten nach d'Alembert

$$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2}\,(x + 2t + x - 2t) + \frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} \sin(\eta)d\eta = x + \frac{1}{2}\,\sin(x)\sin(2t)$$

c) Die Lösung des ursprünglichen Problems setzt sich aus den beiden Teillösungen zusammen:

$$u(x,t) \;=\; 6x(t - \sin t) \;+\; x + \frac{1}{2}\,\sin(x)\sin(2t)$$

Probe:

$u(x,0) = 6x(0 - \sin(0)) \;+\; x + \dfrac{1}{2}\,\sin(x)\sin(0) \;=\; x,$

$u_t(x,t) = 6x(1 - \cos(t)) + 0 + \dfrac{1}{2}\,\sin(x)2\cos(2t) = 6x(1 - \cos(t)) + \,\sin(x)\cos(2t)$

$u_t(x,0) = 6x(1 - \cos(0)) + \,\sin(x)\cos(0) = \sin(x)$

$u_{xx} = 0 + 0 - \dfrac{1}{2}\,\sin(x)\sin(2t)$ (da die ersten beiden Summanden von u linear in x sind, muss man nur den Sinus-Term zwei Mal ableiten).

$u_{tt} = 6x\sin t - \; 2)\;\sin(x)\sin(2t)$

$u_{tt} - 4u_{xx} = 6x\sin t - 2\,\sin(x)\sin(2t) - 4\cdot(-\frac{1}{2}\,\sin(x)\sin(2t)) = 6x\sin t\,.$

Bearbeitung am 28.05- 31.05.2019