Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Hausaufgaben

Aufgabe 1: Bestimmen Sie den Typ folgender Differentialgleichungen

a) $2u_{xx} - 8u_{xy} + 8u_{yy} + u_y = u\,,$

b) $2u_{xy} + u_{yy} + xu_x = \cos(y)\,,$

c) $3u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0\,,$

d) $u_{xx} + e^x u_{yy} + \sin(x)(u_x + u_y) = y + x\,,$

e) $(x^2 + y^2)u_{xx} + 2(x + y)u_{xy} + u_{yy} = 0\,.$

Lösung :

a) $2u_{xx} - 8u_{xy} + 8u_{yy} + u_y = u$

$$2 \cdot 8 - 4^2 = 0 \qquad \text{parabolisch}\,.$$

b) $2u_{xy} + u_{yy} + xu_x = \cos(y)$

$$1 \cdot 0 - 1 = -1 \qquad \text{hyperbolisch}\,.$$

c) $3u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$

$$3 \cdot 1 - 1^2 = 2 \qquad \text{elliptisch}\,.$$

d) $u_{xx} + e^x u_{yy} + \ldots = \ldots$

$$1 \cdot e^x - 0^2 > 0 \qquad \text{elliptisch}\,.$$

e) $(x^2 + y^2)u_{xx} + 2(x + y)u_{xy} + u_{yy} = 0$

$$x^2 + y^2 - (x + y)^2 = -2xy \qquad \begin{cases} \text{parabolisch für} & xy = 0, \\ \text{hyperbolisch für} & xy > 0, \\ \text{elliptisch für} & xy < 0. \end{cases}$$

$$\text{parabolisch} \rightarrow \quad \begin{array}{c|c} \text{ellipt.} & \text{hyp} \\ \hline \text{hyp} & \text{ellipt.} \end{array} \longrightarrow$$

$$\uparrow$$
parabolisch

Aufgabe 2:

a) Lösen Sie die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, && \text{auf } \mathbb{R}^2\,, \\ u(x,0) &= 2\sin(4\pi x) && x \in \mathbb{R}\,, \\ u_t(x,0) &= \cos(\pi x) && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

b) Gegeben sei die Aufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} &= 9u_{xx}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t > 0\,, \\ u(x,0) = f(x) &= \begin{cases} 2 & -1 \le x \le 1\,, \\ 0 & \text{sonst}, \end{cases} \\ u_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Skizzieren Sie die Lösung, die man mit der Formel von d'Alembert erhält für $t = 0,\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1\,.$

Lösungshinweise zu Aufgabe 2:

a) Lösung nach d'Alembert

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sin\left(4\pi(x+t)\right) + \sin\left(4\pi(x-t)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-t}^{x+t} \cos(\pi\eta)d\eta \\ &= 2\sin(4\pi x)\cos(4\pi t) + \left.\frac{\sin(\pi\eta)}{2\pi}\right|_{x-t}^{x+t} \\ &= 2\sin(4\pi x)\cos(4\pi t) + \frac{1}{2\pi}\left(\sin\left(\pi(x+t)\right) - \sin\left(\pi(x-t)\right)\right) \\ &= 2\sin(4\pi x)\cos(4\pi t) + \frac{1}{\pi}\left(\cos\left(\pi x\right)\cdot\sin\left(\pi t\right)\right). \end{aligned}$$

b) Nach d'Alembert gilt $u(x,t) = \dfrac{1}{2}\left(f(x+3t) + f(x-3t)\right)$. Also erhalten wir

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{falls } -1 \le x-3t \le 1 \text{ und } -1 \le x+3t \le 1 \\ 1 & \text{falls } -1 \le x-3t \le 1 \text{ oder } -1 \le x+3t \le 1 \text{ mit ausschliessendem oder} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zum Beispiel erhält man für $t = 1/6$:

$x - 3t = x - 0.5 \in [-1,1] \Longleftrightarrow x \in [-0.5, 1.5]$ und

$x + 3t = x + 0.5 \in [-1,1] \Longleftrightarrow x \in [-1.5, 0.5]$

und damit

$$u(x,\frac{1}{6}) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \in [-0.5, 0.5] \\ 1 & \text{für } x \in [-1.5, -0.5) \text{ oder } x \in (0.5, 1.5] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

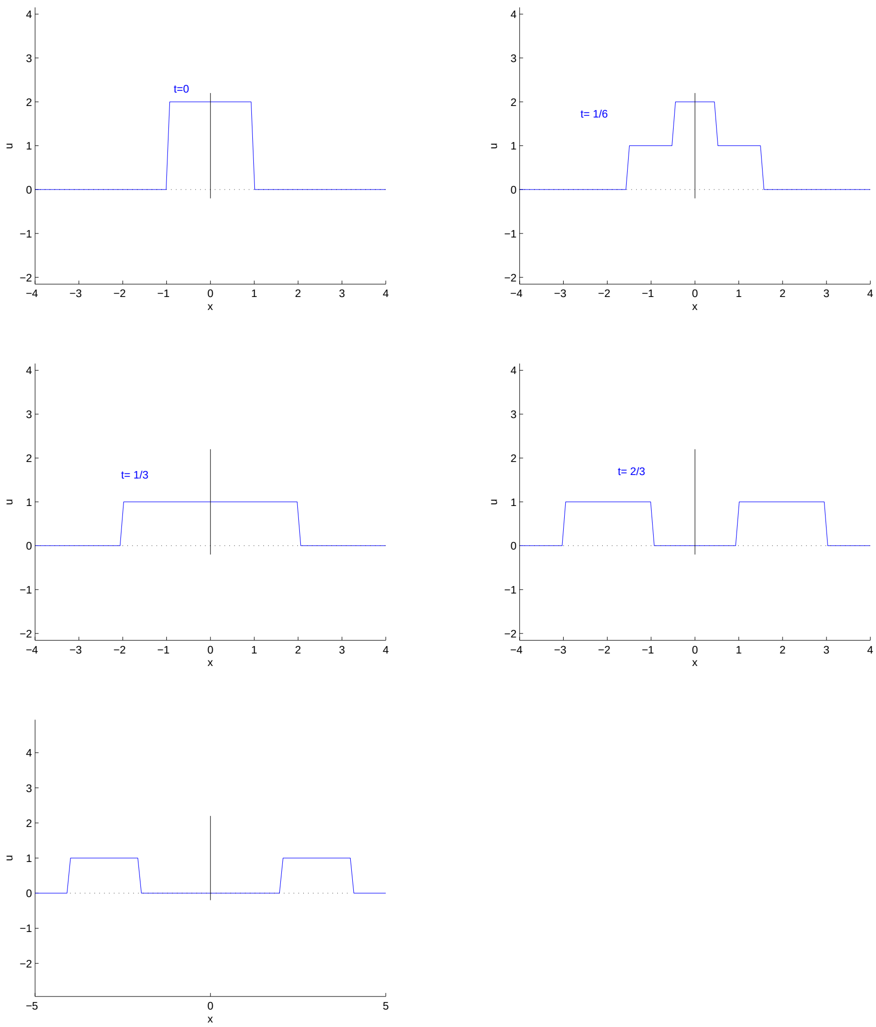
Analog berechnet man die Lösung für die anderen t–Werte.

$$u(x, \frac{1}{3}) = \begin{cases} 2 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x \in [-2, 0) \text{ oder } x \in (0, 2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u(x, \frac{2}{3}) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [-3, -1] \text{ oder } x \in [1, 3] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$u(x, 1) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [-4, -2] \text{ oder } x \in [2, 4] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Anschaulich zerfällt die ursprügliche (eckige) Welle in zwei Wellen, die in entgegengesetzter Richtung laufen.



Abgabe bis: 31.05.19