Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 3, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1)

Gegeben ist die Erhaltungsgleichung $u_t + \left(\frac{u^4}{16}\right)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ .$

a) Sind die Charakteristiken $(x(t), t)$ Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Skizzieren Sie zu den Anfangsdaten $u(x, 0) = 2 + \arctan(x)$, $x \in \mathbb{R}$ die Charakteristik durch den Punkt $(0, 0)$.

c) Prüfen Sie, welche der unten angegebenen Funktionen $u^*, \tilde{u}, \hat{u}$ eine (schwache) Entropielösung zu den Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \le 0, \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$

ist.

$$u^*(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \le \frac{3}{2}t, \\ 1 & \text{für } x > \frac{3}{2}t\,. \end{cases} \qquad \tilde{u}(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \le \frac{15}{16}t, \\ 1 & \text{für } x > \frac{15}{16}t\,. \end{cases}$$

$$\hat{u}(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{für } x \le 0, \\ 2 - \frac{x}{t} & \text{für } 0 < x \le t, \\ 1 & \text{für } x > t\,. \end{cases}$$

Lösung:

a) Für die Charakteristiken erhält man, einerseits

$\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u$ ist also konstant entlang der Charakteristiken.

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = \frac{u^3}{4}$.

Die Steigung der Charakteristiken ist also Konstant. Es handelt sich um Geraden.

b) Die Charakteristik durch den Punkt $(0, 0)$ ist eine Gerade $(x(t), t)$ durch $(0, 0)$ mit

$\dot{x}(t) = \frac{u(0,0)^3}{4} = \dfrac{(2 + \arctan(0))^3}{4} = 2$, also die Gerade $x = 2t$. Skizze

c) Eine Stoßfront $s(t)$ einer Entropielösung muss die Sprungbedingung $\dot{s}(t) = \dfrac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$ erfüllen. Hier also

$$\dot{s}(t) = \frac{\frac{u_l^4}{16} - \frac{u_r^4}{16}}{u_l - u_r} = \frac{\frac{2^4}{16} - \frac{1^4}{16}}{2-1} = \frac{15}{16}\,.$$

u^* erfüllt nicht die Sprungbedingung: $\dot{s}(t) = \frac{15}{16}$.

$\tilde{u}$ erfüllt die Sprungbedingung und ist außerhalb der Stoßfront eine klassische Lösung, also insgesamt eine schwache Entropielösung .

$\hat{u}$ hat keine Unstetigkeiten. Es ist keine Sprungbedingung zu erfüllen! Aber es handelt sich für $0 < x < t$ nicht um eine Lösung der Differentialgleichung. Hier gilt:

$\hat{u}_t + \frac{\hat{u}^3}{4}\,\hat{u}_x = \frac{x}{t^2} + (2 - \frac{x}{t})^3(\frac{-1}{4t}) = 0$

$\Longrightarrow \dfrac{4xt^2 - (2t-x)^3}{4t^4} = 0 \iff x^3 - 6tx^2 + 16xt^2 - 8t^3 = 0$

Für festes t kann diese Bedingung höchstens für drei verschiedene x erfüllt sein, aber bestimmt nicht für alle $0 < x \leq t$.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Entropielösung der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

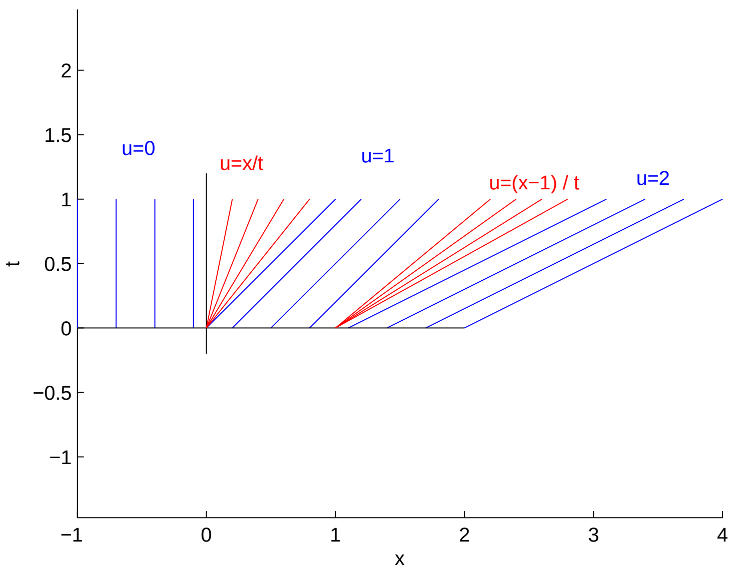
a) $u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & 1 < x \end{cases}$ bzw. **b)** $u(x,0) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases}$

Lösungshinweis zu Aufgabe 2:

a) $u_t + uu_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 & x > 1 \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Zwei Verdünnungswellen



$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{t} & 0 \leq x \leq t \\ 1 & t \leq x \leq t+1 \\ \frac{x-1}{t} & t+1 \leq x \leq 2t+1 \\ 2 & x \geq 2t+1 \end{cases}$$

b) $u_t + uu_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x > 2 \end{cases}$$

2 Stoßwellen:

$s_1(t)$ mit $s_1(0) = 0 \qquad \dot{s}_1(t) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

$$\boxed{s_1(t) = \frac{3}{2}t}$$

$s_2(t)$ mit $s_2(0) = 2 \qquad \dot{s}_2(t) = \frac{0+1}{2} = 1/2$

$$\boxed{s_2(t) = 2 + \frac{t}{2}}$$

für $t = 2$ ist $s_1(t) = s_2(t)$

$\longrightarrow$ neue Stoßwelle

$s_3(t)$ mit $s_3(2) = s_1(2) = s_2(2) = 3 \qquad \dot{s}_3(t) = \frac{2+0}{2} = 1$ also

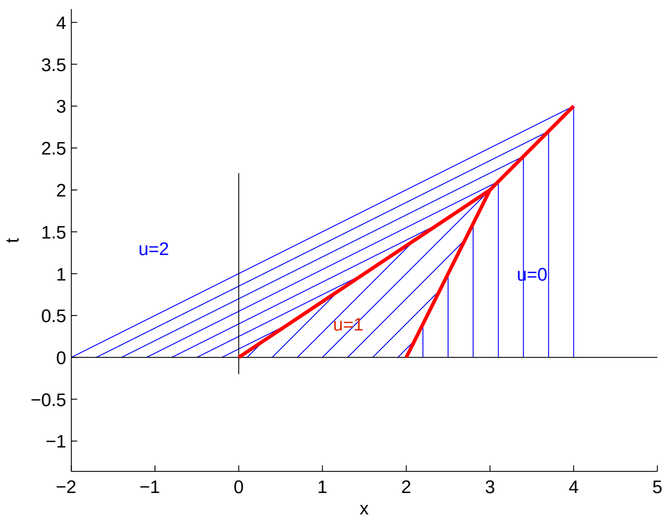
$$\boxed{s_3(t) = t + 1}$$

für $t < 2$

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & x < \frac{3}{2}t \\ 1 & \frac{3}{2}t < x < 2 + \frac{t}{2} \\ 0 & x > 2 + \frac{t}{2} \end{cases}$$

für $t \geq 2$

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & x < t+1 \\ 0 & x > t+1 \end{cases}$$



Bearbeitung am 14.05- 17.05.2019