**Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg** **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

# Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

## Blatt 3, Hausaufgaben

**Aufgabe 1:**

a) Bestimmen Sie die Entropielösung der Burger's Gleichung $u_t + uu_x = 0$ mit den Anfangswerten

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

zum Zeitpunkt $t = 2$. Welches neue Problem tritt bei $t = 2$ auf?

b) Physikalische Prozesse, die durch glatte Lösungen hyperbolischer Differentialgleichungen beschrieben werden, sind im allgemeinem reversibel. Kennt man die Lösungen zu einer bestimmten Zeit, so kann man sie sowohl für spätere als auch für frühere Zeiten angeben.

Bestimmen Sie die Entropielösungen der Burgers Gleichung $u_t + uu_x = 0$ zum Zeitpunkt $t = 1$ mit den Anfangsdaten

$$u_1(x,0) = \begin{cases} 1 & x < -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - 2x & -\frac{1}{4} \le x \le \frac{1}{4} \\ 0 & x > \frac{1}{4} \end{cases}$$

bzw.

$$u_2(x,0) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ 0 & x > 0. \end{cases}$$

Was schließen Sie aus ihren Ergebnissen bezüglich der Reversibilität nicht glatter Lösungen der Burgers Gleichung?

**Tipp: Skizzen der Charakteristiken können sehr hilfreich sein!**

**Lösungsskizze zur Aufgabe 1:**

a) $u_t + uu_x = 0$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

Inzwischen ist klar:

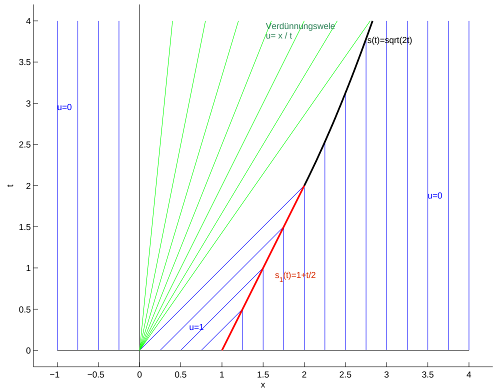
- die Lösung ist konstant entlang der Charakteristiken
- die Charakteristiken sind in der $(x,t)-$ Ebene Geraden mit der Steigung $1/u_0$.

Zunächst erhalten wir eine Stoß- und eine Verdünnungswelle: Für $t<2$ gilt:

$$u(x,t)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \frac{x}{t} & 0\le x\le t \\ 1 & t\le x\le 1+\frac{t}{2} \\ 0 & x>1+\frac{t}{2} \end{cases}$$

Für $t=2$ gilt:

$$u(x,2)=\begin{cases} 0 & x\le 0 \\ \frac{x}{t} & 0\le x\le 2 \\ 1 & 2\le x\le 2 \qquad \text{Dieser Bereich is für } t>2 \text{ leer.} \\ 0 & x>1+\frac{t}{2} \end{cases}$$




$$u(x,2)=\begin{cases} 0 & x<0 \ \vee \ x>2 \\ \frac{x}{2} & 0\le x\le 2 \end{cases}$$

Zum Zeitpunkt $t=2$ trifft die Verdünnungswelle auf die Stoßwelle. Es gilt dann $u_l=\dfrac{x}{t}, \qquad u_r=0$. Es entsteht eine neue Stoßfront!

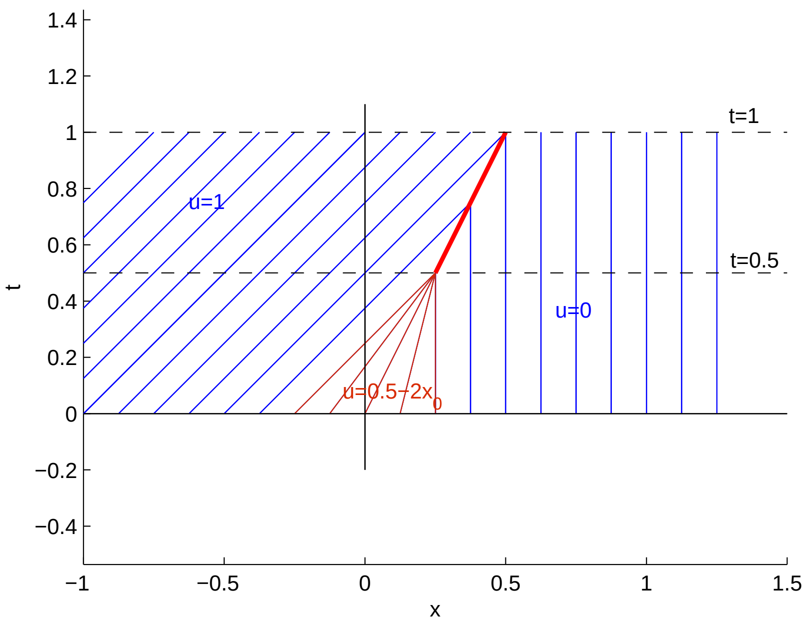
**Nicht von den Studierenden verlangt:** $\dot{s}(t)=\dfrac{\frac{s(t)}{t}+0}{2}=\dfrac{s(t)}{2t}$ Dies ist eine gewöhnliche Dgl. für $s(t)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{ds}{s}=\dfrac{dt}{2t} \qquad \Longrightarrow \quad s=c\sqrt{t} \\ s(2)=2 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad c=\sqrt{2},\ \ s=\sqrt{2t}$$

Die Unstetigkeit bewegt sich also auf der Kurve $x(t)=\sqrt{2t}$ weiter.

b) $u_t + uu_x = 0$

Die Anfangsdaten $u_1(x,0) = \begin{cases} 1 & x < -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - 2x & -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{4} \\ 0 & x > \frac{1}{4} \end{cases}$ liefern:




$$-\frac{1}{4} \leq x_0 \leq \frac{1}{4} \quad \Longrightarrow \quad x - x_0 = u_0.t$$

$$t = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad x = x_0 + \left(\frac{1}{2} - 2x_0\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Die Charakteristiken, die für $t = 0$ zwischen $x = -\frac{1}{4}$ und $x = \frac{1}{4}$ starten, schneiden sich alle im Punkt $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Für $t = \frac{1}{2}$ gilt $u_l = 1 \ \forall x < \frac{1}{4}$ und $u_r = 0 \ \forall x > \frac{1}{4}$. Es entsteht also eine Stoßwelle mit der Geschwindigkeit

$$\frac{f_l - f_r}{u_l - u_r} = \frac{\frac{u_l^2}{2} - \frac{u_r^2}{2}}{u_l - u_r} = \frac{1}{2}$$

Damit gilt: $\qquad u(x,1) = \begin{cases} 1 & x < \frac{1}{2} \\ 0 & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$

---

**Zusatz (nicht von den Studierenden verlangt):**

*Für* $t < 0.5$ *gilt:*

$u(x,t) = 0$ *für* $x \geq 0.25\,,$

$u(x,t) = 1$ *für* $x \leq t - 0.25\,,$

*Dazwischen, also für* $t - 0.25 < x < 0.25$ *gilt:*

$\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{du}{dt} = 0.$ *D.h.* $u$ *konstant entlang der Charakteristiken und*

$x = ut + c \iff c = x(0) = x - ut$

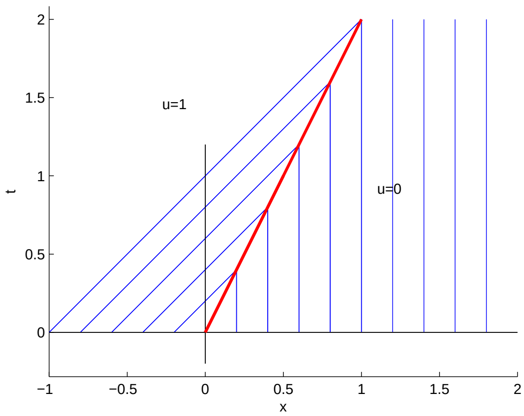
$\implies u(x,t) = u_0(x - ut) = \frac{1}{2} - 2(x - ut) \iff u \cdot (1 - 2t) = \frac{1}{2} - 2x$

*Also* $u(x,t) = \dfrac{1 - 4x}{2 - 4t}$ *für* $t - 0.25 < x < 0.25,\ 0 < t < 0.5\,.$

---

Die Anfangsdaten $u_2(x,0) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ Standard Riemann-Problem

liefern das folgende Bild der Charakteristiken




Hier entsteht von Anfang an eine Stoßwelle mit der Geschwindigkeit $\dfrac{1}{2}$, so dass ebenfalls

$$u(x,1) = \begin{cases} 1 & x < \dfrac{1}{2} \\ 0 & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

gilt.

Offensichtlich kann man aus Kenntnis der Lösung zum Zeitpunkt $t = 1$ die Lösung zu früheren Zeiten etwa $t = 0$ nicht rekonstruieren.

**Aufgabe 2:**

Wir untersuchen noch einmal das einfache Verkehrsflussmodell aus Blatt 1 mit den dort eingeführten Bezeichnungen:

$u(x,t)$ = Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt $x$ zum Zeitpunkt $t$,

$v(x,t)$ = Geschwindigkeit im Punkt $x$ zum Zeitpunkt $t$,

$q(x,t)$ = Fluß = Anzahl Fahrzeuge die $x$ zum Zeitpunkt pro Zeiteinheit $t$ passieren.

Wir führen zusätzlich ein:

$u_{max}$ = maximale Dichte der Fahrzeuge (Stoßstange an Stoßstange),

$v_{max}$ = maximale Geschwindigkeit,

und verfeinern unser Modell aus Blatt 1, indem wir die oberen Schranken für die Dichte und für die Geschwindigkeit berücksichtigen. Dies kann z. B. wie folgt geschehen:

$$v(u(x,t)) = v_{max}\left(1 - \frac{u(x,t)}{u_{max}}\right)$$

a) Stellen Sie die Kontinuitätsgleichung ( $u_t + q_x = 0$ ) auf.

b) Zeigen Sie, dass die Charakteristiken wieder Geraden sind, und bestimmen Sie deren Steigungen.

c) Skizzieren Sie die Charakteristiken für

$$v_{max} = 1 \quad \text{(Hier ist geeignet skaliert worden!)}$$
$$u(x,0) = \begin{cases} u_l = u_{max}/2 & x < 0 \\ u_r = u_{max} & x > 0 \quad \text{(rote Ampel/ Stau etc.)} \end{cases}$$

d) Für die Burgers Gleichung hatten wir Stoßwellen nur im Fall $u_l > u_r$ zugelassen. Hier muss offensichtlich eine andere Bedingung her. Woran könnte das liegen?

**Hinweis:** Eine vollständige Beantwortung der Frage ist nur mit Hilfe der Vorlesungsfolien nicht möglich. Sie können hier nur eine Vermutung äußern!

**Lösungshinweis zu Aufgabe 2:**

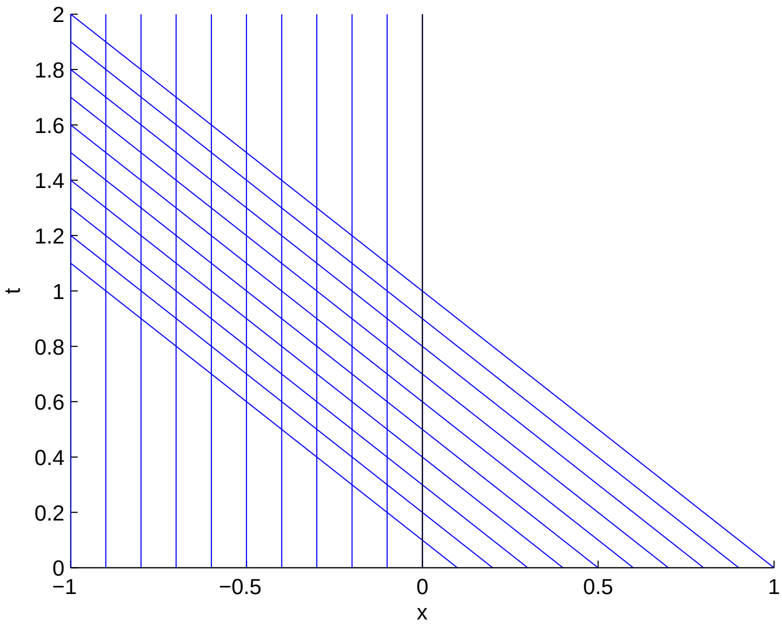
a) $u_t + \left(v_{max}\, u\,(1 - \frac{u}{u_{max}})\right)_x = u_t + \left(v_{max}\,(u - \frac{u^2}{u_{max}})\right)_x = u_t + (v_{max}\,(1 - \frac{2u}{u_{max}}))u_x = 0$

b) Auf den Charakteristiken $x(t)$ gilt:

$$\dot{x}(t) = \left(v_{max}\,(1 - \frac{2u}{u_{max}})\right) \quad \text{und} \quad \dot{u}(t) = 0\,.$$

Die Charakteristik durch einen Punkt $(x(0), 0)$ hat als Gerade in der $x-t-$ Ebene die konstante Steigung $(v_{max}\,(1 - \frac{2u(x(0),0)}{u_{max}})^{-1}$. Damit sind die Charakteristiken wieder Geraden.

c) Skizze der Charakteristiken:




d) Die Entropiebedingung der Vorlesung gilt nur für konvexe Flußfunktionen f (hier q). Da $f'$ in unserem Fall monoton fallend ist, gilt die Entropiebedingung aus der Vorlesung nicht.

Was immer noch gilt ist die Anschauliche Interpretation: Aus der Stoßwelle kommt keine Information für die künftigen Funktionswerte!! Also

$$f'(u_l) > \dot{s} > f'(u_r)$$

Da $f'$ monoton fallend ist, ergibt sich für Stoßwellen die Bedingung $u_l < u_r$ .

**Abgabe bis: 17.05.19**