Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1) (Klausur SoSe17, Aufg.2a, Hinze/Kiani)

Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t + \tfrac{1}{2}u_x &= -4u, & x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= 2\sin(x) & x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Lösung: Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man:

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \Longrightarrow x(t) = \frac{t}{2} + C \Longrightarrow 2x - t = C$ **[1 Punkt]**

$\frac{du}{dt} = -4u \Longrightarrow \frac{du}{u} == -4\,dt \Longrightarrow \ln(|u|) = -4t + d$

$|u| = e^{-4t} \cdot \tilde{d}, \qquad \tilde{d} \in \mathbb{R}^+$

Da $u = 0$ ebenfalls eine Lösung ist, erhalten wir

$u(x(t),t) = D \cdot e^{-4t}, \qquad D \in \mathbb{R}$ oder $D = u \cdot e^{4t}$. **[2 Punkte]**

Anwendung des Satzes über implizite Funktionen, liefert die allgemeine Lösung:

$D = f(C) \Longrightarrow u \cdot e^{4t} = f(2x - t) \Longrightarrow u(x,t) = e^{-4t} \cdot f(2x - t)$. **[1 Punkt]**

Die Anfangsbedingung verlangt:

$u(x,0) = e^0 \cdot f(2x - 0) \stackrel{!}{=} 2\sin(x) \Longrightarrow f(x) = 2\sin(\frac{x}{2})$. **[1 Punkt]**

$u(x,t) = 2\,e^{-4t}\sin\left(x - \frac{t}{2}\right)$. **[1 Punkt]**

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie eine Lösung $u(x, y)$ der folgenden Differentialgleichung

$$xu_x + \frac{y}{2}u_y = u\,,$$

die die Bedingung $u(1, y) = 1 + y^2\,, \qquad y \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Lösung 2:

a) $xu_x + \frac{y}{2}u_y = u\,, \qquad u(1, y) = 1 + y^2$

Mit x als Parameter rechnet man für $x \neq 0$ für die DGL $u_x + \frac{y}{2x}u_y = \frac{u}{x}$

$$\begin{array}{lll}
\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} & \Longrightarrow & \frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x} \\
\Longrightarrow 2\ln|y| = \ln|x| + c & \Longrightarrow & e^{2\ln|y|} = e^{\ln|x|+c} \\
\Longrightarrow y^2 = c_1 \cdot x & \Longrightarrow & c_1 = \frac{y^2}{x} \\
\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} & \Longrightarrow & \frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \\
\ln|u| = \ln|x| + d & \Longrightarrow & u = c_2 \cdot x \Longrightarrow c_2 = \frac{u}{x} \\
c_2 = f(c_1) & \Longrightarrow & \frac{u}{x} = f(\frac{y^2}{x}) \Longrightarrow u(x, y) = x \cdot f(\frac{y^2}{x})
\end{array}$$

Das ist die allgemeine Lösung. Jetzt noch f mit Hilfe der Anfangsbedingung festlegen: $u(1, y) = 1 + y^2$ in die allgemeine Lösung einsetzen

$u(x, y) = x \cdot f(\frac{y^2}{x})$

$u(1, y) = 1 \cdot f(\frac{y^2}{1}) = f(y^2) \stackrel{!}{=} 1 + y^2$

Also $f(\mu) = 1 + \mu$ und damit

$u(x, y) = x \cdot f(\frac{y^2}{x}) = x \cdot (1 + \frac{y^2}{x}) = x + y^2$

Nachträglich kann man jetzt feststellen, dass die Lösung für alle $x \in \mathbb{R}$ die DGL + Anfangsbedingung erfüllt. Die Einschränkung $x \neq 0$ kann also weg gelassen werden.

ALTERNATIV:

Hilfsproblem $\quad xU_x + \frac{y}{2}U_y + uU_u = 0$

$$\begin{cases}
\dot{x} = x & \Longrightarrow \quad x = c_1 e^t \\
\dot{y} = \frac{y}{2} & \Longrightarrow \quad y = c_2 e^{\frac{t}{2}} \\
\dot{u} = u & \Longrightarrow \quad u = c_3 e^t
\end{cases}$$

Es gilt (mit geeigneten Konstanten)

$$\begin{cases}
x &= cy^2 \\
u &= dx
\end{cases}$$

$$c = \frac{x}{y^2}\,, \qquad d = \frac{u}{x}\,, \qquad \phi\left(\frac{x}{y^2}, \frac{u}{x}\right) = 0$$

Auflösbarkeit vorausgesetzt, folgt

$$\frac{u}{x} = \psi\left(\frac{x}{y^2}\right) \qquad u = x \cdot \psi\left(\frac{x}{y^2}\right)$$

zusätzlich muss gelten: $\quad u(1, y) = \psi\left(\frac{1}{y^2}\right) = y^2 + 1$

$$\implies \psi(\mu) = \frac{1}{\mu} + 1 \iff \psi\left(\frac{x}{y^2}\right) = \frac{y^2}{x} + 1 \implies \boxed{u = y^2 + x}$$

Aufgabe 3: (Nur für die sehr schnellen Rechner)
Gegeben sei die Anfangswertaufgabe

$$u_t + 3u \cdot u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & \forall x \leq 0 \\ \frac{1}{3} & \forall x > 0 \end{cases}$$

a) Stellen Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem auf.

b) Sind die Charakteristiken Geraden?

c) Zeichnen Sie die Charakteristiken durch die Punkte
$(x_k, 0) := (k, 0)$ für $k \in \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
Geben Sie an welche Werte die Lösung entlang dieser Charakteristiken annimmt.

d) Können Sie mit Hilfe der Teile a)- c) die Werte von $u(x,t)$ in den Punkten $(-1,2), (1,2)$ und $(3,2)$ angeben?

Lösung:

a) Erweitertes Problem $\quad U_t + (3u)U_x + 0 \cdot U_u = 0$ ergibt:

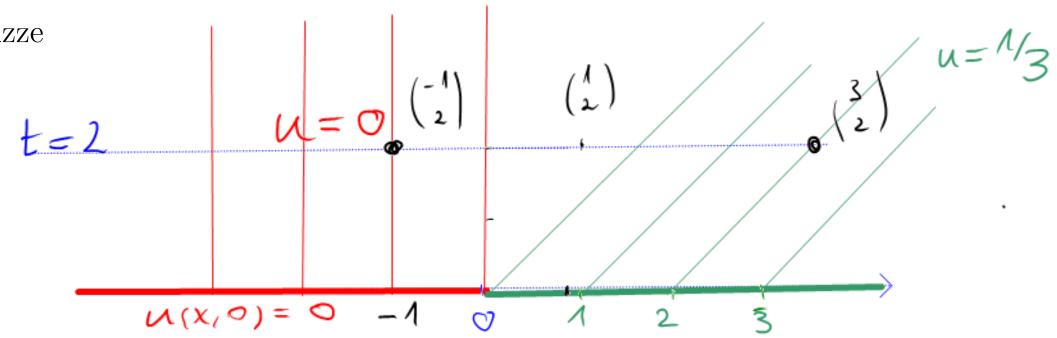
$$\frac{dx}{dt} = 3u, \qquad \frac{du}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$u = C, \qquad dx = 3C dt$$

$$\Longrightarrow x(t) = 3Ct + D = 3ut + D \Longrightarrow D = x - 3ut\,.$$

b) Die Charakteristiken sind Geraden, denn auf den Charakteristiken gilt
$\frac{du}{dt} = 0 \qquad \Longrightarrow u$ ist also entlang jeder Charakteristik konstant. Außerdem gilt
$\frac{dx}{dt} = 3u \qquad \Longrightarrow$ also ist $\frac{dx}{dt}$ konstant entlang der Charakteristik. D.h.
die Steigung der Charakteristiken ist konstant. Es handelt sich um Geraden.

c) Skizze



d) Aus der Skizze entnimmt man $u(x,t) = 0, \forall x \leq 0$. Insbesondere also $u(-1,2) = 0$.

Weiter entnimmt man der Skizze $u(x,t) = 1, \forall x > t$. Insbesondere also $u(3,2) = 0$.

Die Charakteristiken helfen nicht bei der Bestimmung der Lösungswerte $u(x,t)$ für $0 < x < t$, also zum Beispiel $u(1,2)$.

Die Lösung dieses Problems wird auf dem nächsten Blatt behandelt!

Bearbeitung am 29.04.-03.05.2019