Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 2, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie diejenige Lösung des Problems

$$u_x + u_y = u^2 ,$$

die die Anfangskurve $c(t) = (t, -t, t)$ enthält. D.h. auf der Geraden $y = -x$ soll $u(x, -x) = x$ gelten.

b) Bestimmen Sie eine Lösung $u(x, t)$ der folgenden Anfangswertaufgabe

$$2u_t + x^2 u_x = \frac{1}{u}, \qquad u(x, 0) = 2\sqrt{e^{-4x^2}} \qquad t \in \mathbb{R}^+,\, x \in \mathbb{R}.$$

Existiert die Lösung für alle $t \in \mathbb{R}^+$, $x \in \mathbb{R}$?

Wenn nicht, kann die Lösung in den Definitionslücken stetig ergänzt werden?

Lösung:

a) Wir betrachten das erweitere Problem

$$U_x + U_y + u^2\, U_u = 0$$

mit den zugehörigen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dy}{dx} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad y = x + c_1 \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 = y - x ,$$

und

$$\frac{du}{dx} = u^2 \quad \Longleftrightarrow \quad \int \frac{du}{u^2} = \int dx \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{u} = x - c_2 \quad \Longleftrightarrow \quad c_2 = x + \frac{1}{u}$$

Die Lösung ist implizit gegeben durch

$$\Phi\left(y - x\, ,\, x + \frac{1}{u}\right) = 0\,.$$

Im Falle der Auflösbarkeit erhält man

$$x + \frac{1}{u} = g(y - x) \quad \text{oder} \quad u = \frac{1}{g(y - x) - x}\,.$$

Die Anfangskurve $(t,-t,t)$ liefert

$$u(t,-t) = t \iff t = \frac{1}{g(-2t)-t}$$
$$\iff g(-2t) = \frac{1}{t} + t \iff g(\mu) = -\frac{2}{\mu} - \frac{\mu}{2}$$

Damit erhält man für die Lösung u

$$u(x,y) = \frac{1}{-\frac{y-x}{2} - \frac{2}{y-x} - x} = \frac{1}{-\left(\frac{y+x}{2} + \frac{2}{y-x}\right)}$$
$$= \frac{-2(y-x)}{y^2-x^2+4}\,.$$

für $x^2 < y^2+4$.

b) Für $x=0$ erhält man die gewöhnliche Dgl. $2u_t = \frac{1}{u}$ mit der Lösung $u(0,t) = \sqrt{t+C}$. Der Anfangswert liefert $C=4$. Für $x \neq 0$ rechnet man wie folgt.

$$\begin{array}{llll} \frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{2} & \frac{dx}{x^2} = \frac{dt}{2} & -\frac{1}{x} = \frac{t}{2} - C_1 & C_1 = \frac{t}{2} + \frac{1}{x} \\ \frac{du}{dt} = \frac{1}{2u} & 2u \cdot du = dt & u^2 = t + C_2 & C_2 = u^2 - t \end{array}$$

$$C_2 = f(C_1) \iff u^2 - t = f(\frac{t}{2} + \frac{1}{x})$$

Aus den Anfangsdaten folgt

$$(u(x,0))^2 - 0 = 4\,e^{-4x^2} = f(\frac{1}{x})\,.$$

Also

$$f(y) = 4\,e^{-4(1/y)^2} \implies u^2 = t + 4\exp\left(-4(\frac{t}{2}+\frac{1}{x})^{-2}\right)$$

$$u(x,t) = \sqrt{t + 4\exp\left(-4(\frac{(2x)^2}{(tx+2)^2}\right)} = \sqrt{t + 4e^{\frac{-16x^2}{(tx+2)^2}}}\,.$$

Die Lösung ist für $x(t) = -2/t$ nicht definiert. Für jedes feste $t \in \mathbb{R}^+$ gilt aber $x^2 = 4/t^2 \neq 0$ und

$$\lim_{x\to -2/t} \frac{-16x^2}{(tx+2)^2} = -\infty \implies \lim_{x\to -2/t} e^{\frac{-16x^2}{(tx+2)^2}} = 0$$

und damit

$$\lim_{x\to -2/t} u(x,t) = \sqrt{t}\,,$$

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie eine stetige Lösung $u(x,t)$ der folgenden Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + u_x &= x, \qquad x,t > 0 \\ u(x,0) &= x \qquad (x \geq 0) \\ u(0,t) &= t \qquad (t \geq 0) \end{aligned}$$

mit Hilfe der Charakteristikenmethode. Bestimmen Sie dazu jeweils die Lösung zur Anfangsbedingung $u(x,0) = x$ bzw. zur Randbedingung $u(0,t) = t$ und setzen Sie diese Lösungen stetig zusammen. Ist die so gewonnene Lösung für alle $x, t \geq 0$ partiell differenzierbar?

Freiwillige Zusatzaufgabe : Wer mag, kann die Aufgabe auch mittels Laplace–Transformation bzgl. der Variablen t lösen. Bei der Transformation ist x als Parameter aufzufassen. Im Bildraum ist eine Anfangswertaufgabe bzgl. einer gewöhnlichen Differentialgleichung in x zu lösen.

Lösung 2:

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = 1 \implies x(t) = t + C_1 \implies C_1 = x - t \\ &\frac{du}{dt} = x = C_1 + t \implies u = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \implies C_2 = u - \frac{t^2}{2} - (x-t)t \end{aligned}$$

Im Falle der Auflösbarkeit:

$$\Phi(C_1, C_2) = 0 \implies u + \frac{t^2}{2} - xt = f(x-t).$$

Für die vorgegebenen Anfangswerte erhalten wir also die Lösung u_A:

$$u_A(x,0) = u(x,0) = f(x) = x \implies u_A(x,t) = (x-t) + xt - \frac{t^2}{2}$$

u_A erfüllt die Dgl und die Anfangswerte. Es gilt allerdings $u(0,t) = -t - \frac{t^2}{2}$. Die Randbedingung ist also nur für $t = 0$ erfüllt. Wir gehen wieder von der allgemeinen Lösung

$$u = f(x-t) - \frac{t^2}{2} + xt$$

aus und passen an die Randdaten $u(0,t) = t$ an.

$$t = f(-t) - \frac{t^2}{2} \implies f(t) = \frac{t^2}{2} - t \implies u_R(x,t) = \frac{(x-t)^2}{2} - (x-t) - \frac{t^2}{2} + xt$$

Wenn wir die Lösungen stetig zusammensetzen wollen, müssen wir eine Kurve finden längs der $u_A = u_R$ gilt:

$$\begin{aligned} u_A(x,t) = (x-t) + xt - \frac{t^2}{2} &\overset{!}{=} \frac{(x-t)^2}{2} - (x-t) - \frac{t^2}{2} + xt = u_R(x,t) \\ \iff (x-t) &\overset{!}{=} \frac{(x-t)^2}{2} - (x-t) \iff (x-t)\left(2 - \frac{(x-t)}{2}\right) \overset{!}{=} 0\,. \end{aligned}$$

Diese Bedingung ist genau dann erfüllt wenn $x = t$ oder $x = t+4$ gilt. Wegen der Anfangs-/Randwerte setzen wir entlang der Geraden $x = t$ zusammen.

$$u(x,t) := \begin{cases} (x-t) + xt - \dfrac{t^2}{2} & x \geq t \\ \frac{(x-t)^2}{2} - (x-t) + xt - \frac{t^2}{2} & x \leq t\,. \end{cases}$$

Wie man leicht nachrechnet, machen die partiellen Ableitungen hier Sprünge. Die zusammengesetzte Funktion ist also nicht partiell differenzierbar.

Laplace-Transformation

$u(x,t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, U(x,s), \qquad u_t \circ\!\!-\!\!\bullet\, sU - u(x,0) = sU - x, \qquad u_x \circ\!\!-\!\!\bullet\, U_x, \qquad t \circ\!\!-\!\!\bullet\, 1/s^2$

Neues System: $sU - x + U_x = \dfrac{x}{s}$, $\quad U(0,s) = \frac{1}{s^2}$ liefert als Lösung der homogenen Aufgabe $U_h = ce^{-sx}$. Variation der Konstanten oder spezieller Ansatz liefern

$$U(x,s) = x\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right) - \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}\right) + Ce^{-sx}$$

Einsetzen der Anfangswerte $U(0,s) = 1/s^2$ ergibt

$$U(x,s) = x\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2}\right) - \left(\frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3}\right) + \left(\frac{2}{s^2} + \frac{1}{s^3}\right) e^{-sx}$$

$$U(x,s) \bullet\!\!-\!\!\circ\; x(1+t) - \left(t + \frac{t^2}{2}\right) + h_x(t)\left[2(t-x) + \frac{(t-x)^2}{2}\right] = u(x,t)$$

Abgabe: 29.04.-03.05.2019