Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis, Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1:

Gegeben ist die Differentialgleichung $u_t + 3u_x = 0$ für eine Funktion
$u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto u(x,t)$.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen für die Charakteristiken und zeichnen Sie einige Charakteristiken.

b) Welche Lösungen erhält man für folgende zugehörige Anfangswertaufgaben?

(i) $u_t + 3u_x = 0$, mit $u(x,0) = xe^{-x}$.

(ii) $u_t + 3u_x = 0$, mit $u(x, \frac{x}{3}) = x$.

(iii) $u_t + 3u_x = 0$, mit $u(x, \frac{x}{3}) = 1$.

Lösung:

a) $u_t + 3u_x = 0$.

Auf einer festen Charakteristik $(x(t), t)$ gilt:

$$\dot{x}(t) = 3 \implies x(t) = c + 3t,\ x(0) = c = x_0 = x - 3t\,.$$

Die Charakteristiken sind parallele Geraden $x(t) = 3t + c,\ c \in \mathbb{R}$.
Auf einer solchen Geraden $u(x(t), t) = f(x - 3t) = f(c)$ konstant .

(i) $u_t + 3u_x = 0$, mit $u(x,0) = xe^{-x}$.

Auf jeder Charakteristik $(x(t), t)$ gilt $x(0) = c = x(t) - 3t$.

$$\implies \begin{cases} u(x,t) &= u(x-3t, 0) = u_0(x-3t) \\ u(x,0) &= xe^{-x} = u_0(x) \end{cases}$$

$$\implies u(x,t) = (x - 3t)e^{-(x-3t)}$$

(ii) $u_t + 3u_x = 0$, mit $u(x, \frac{x}{3}) = x$.

Wir wissen aus Teil a) $u(x(t), t) = f(x - 3t)$. Insbesondere also
$u(x, \frac{x}{3}) = f(x - 3 \cdot \frac{x}{3}) = f(0)$.
Wir erhalten also den Widerspruch $f(0) = x$. Es gibt keine Lösung, da wir nicht konstante Werte auf einer Charakteristik vorgegeben haben.

(iii) $u_t + 3u_x = 0$, mit $u(x, \frac{x}{3}) = 1$. Analog zum letzten Teil erhalten wir

$$u(x, \tfrac{x}{3}) = f(x - 3 \cdot \tfrac{x}{3}) = f(0) \stackrel{!}{=} 1\,.$$

Dieses Mal erhalten wir keinen Widerspruch, aber auch keine eindeutige Lösung. Wir kennen den Wert von f nur bei Null. Es gibt unendlich viele Lösungen.

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Differentialgleichung $xu_t - tu_x = 0$ für eine Funktion $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \ (x,t) \mapsto u(x,t)$.

a) Bestimmen Sie die Gleichungen für die Charakteristiken und zeichnen Sie die Charakteristiken durch die Punkte $(x,t) = (1,0)$ und $(x,t) = (2,0)$.

b) Welche Lösungen erhält man für folgende zugehörige Anfangswertaufgaben?

(i) $xu_t - tu_x = 0, \quad$ mit $\quad u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

(ii) $xu_t - tu_x = 0, \quad$ mit $\quad u(x,0) = 1 + e^{-x^2}$.

(iii) $xu_t - tu_x = 0, \quad$ mit $\quad u(x,0) = 1 + x$.

Lösungsskizze:

a) $xu_t - tu_x = 0$.

Auf einer festen Charakteristik $(x(t), t)$ gilt: $xu_t - tu_x = 0$.

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}, \qquad x \neq 0$$

$$xdx = -tdt \implies \frac{x^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + \frac{k}{2} \implies k =: C^2 = x^2 + t^2 .$$

$$u(x,t) = f(C^2) = f(x^2 + t^2).$$

Die Charakteristiken sind Halbkreise in der oberen Halbebene $(t > 0)$ mit Mittelpunkt Null. Für $x_0 = 0$ besteht die Charakteristik nur aus einem Punkt.

(i) $xu_t - tu_x = 0, \quad$ mit $\quad u(x,0) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Anfangswerte liefern :

$$u(x,0) = f(x^2) = \frac{1}{1+x^2} \implies f(y) = \frac{1}{1+y} \implies u(x,t) = f(x^2+t^2) = \frac{1}{1+x^2+t^2}$$

(ii) $xu_t - tu_x = 0, \quad$ mit $\quad u(x,0) = 1 + e^{-x^2}$.

Völlig analog zum letzen Teil erhalten wir

$$u(x,0) = f(x^2) = 1+e^{-x^2} \implies f(y) = 1+e^{-y} \implies u(x,t) = f(x^2+t^2) = 1+e^{-x^2-t^2} .$$

(iii) $xu_t - tu_x = 0, \quad$ mit $\quad u(x,0) = u(x,0) = 1 + x$.

Hier erhalten wir keine Lösung. Die bedingung lautet: $u(x,0) = f(x^2) = 1 + x$. Also zum Beispiel $u(-1,0) = 1 - 1 = 0$ und $u(1,0) = 1 + 1 = 2$. Beide Punkte liegen aber auf einer Charakteristischen Kurve (vgl. Teil a)). Die Lösungswerte müssten also gleich sein!

Bearbeitung am 16-18.4.2019