Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 1, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

Ein einfaches Verkehrsflussmodell:

Wir betrachten einen eindimensionalen Fluss von Fahrzeugen entlang einer unendlich langen, einspurigen Fahrbahn. In einem sogenannten makroskopischen Modell betrachtet man nicht einzelne Fahrzeuge, sondern den Gesamtfluss der Fahrzeuge. Dazu führen wir folgende Größen ein :

$u(x,t)$ = (Längen-)Dichte der Fahrzeuge (Fahrzeuge/Längeneinheit) im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$v(x,t)$ = Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t,

$q(x,t)$ = Fluss = Anzahl Fahrzeuge, die x zum Zeitpunkt t pro Zeiteinheit passieren $= u(x,t) \cdot v(x,t)$.

a) Nehmen Sie an, dass es keine Ein– bzw. Ausfahrten gibt, dass keine Fahrzeuge verschwinden, und dass keine neuen Fahrzeuge hinzukommen. Sei $N(t, a, \Delta a) :=$ Anzahl Fahrzeuge auf einem Ortsintervall $[a, a + \Delta a]$ zum Zeitpunkt t. Machen Sie sich klar, dass dann einerseits

$$N(t, a, \Delta a) = \int_a^{a+\Delta a} u(x,t)\, dx$$

gilt und andererseits

$$N(t, a, \Delta a) - N(t_0, a, \Delta a) = \int_{t_0}^{t} q(a,\tau) - q(a + \Delta a, \tau) d\tau\,.$$

Leiten Sie hieraus die sogenannte Erhaltungsgleichung für die Masse (Anzahl Fahrzeuge)

$$u_t + q_x = 0$$

her.

Tipps zum Vorgehen: Leiten Sie beide Formeln für N nach t ab, teilen Sie durch Δa und betrachten Sie den Grenzfall $\Delta a \to 0$.

b) Nehmen Sie zusätzlich an, dass die Geschwindigkeit nur von der Dichte abhängt: $v = v(u)$. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dq}{du} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

die Erhaltung der Masse beschreibt.

c) Wir nehmen nun in einem ersten einfachen Modell an, dass die Geschwindigkeit umgekehrt proportional zur Dichte wächst und die Dichte positiv ist.

$$v(x,t) \;=\; c + \frac{k}{u(x,t)}$$

Wie lautet die Kontinuitätsgleichung (=Erhaltungsgleichung für die Masse)?

d) Lösen Sie die Aufgabe aus Teil c) mit $c = 2$ und $u(x,0) = e^{-x^2}$.

Lösung:

a) Es gilt einerseits: $\quad N(t) \;=\; \displaystyle\int_a^b u(x,t)\,dx$

und andererseits: $\quad N(t) - N(t_0) \;=\; \displaystyle\int_{t_0}^t q(a,\tau) - q(b,\tau)d\tau$

Ableiten nach t ergibt: $\displaystyle\frac{\partial}{\partial t}N(t) \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\int_a^b u(x,t)\,dx = \;q(a,t) - q(b,t)$

Setzt man nun $b = a + \Delta a$ und läßt Δa gegen Null gehen, so folgt bei hinreichender Glattheit der beteiligten Funktionen

$$\lim_{\Delta a\to 0}\frac{1}{\Delta a}\int_a^{a+\Delta a}\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\,dx = \lim_{\Delta a\to 0} -\frac{q(a+\Delta a,t) - q(a,t)}{\Delta a}$$

$$\Longrightarrow\; \frac{\partial}{\partial t}u(a,t) = \;-\frac{\partial}{\partial a}q(a,t)$$

Da diese Überlegungen in jedem Punkt gelten, folgt die Kontinuitätsgleich. $u_t{+}q_x = 0$.

b) Eigentlich klar, denn in diesem Fall ist $q(x,t) = u(x,t)\cdot v(u(x,t))$. Der Fluß q ist also eine Funktion von $u(x,t)$. Aus der Kettenregel folgt dann die Behauptung.

Etwas ausführlicher:

Mit $q(x,t) = u(x,t)\cdot v(u(x,t))$ gilt einerseits

$$\frac{dq}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; (v(u) + u\cdot v_u)\,u_x$$

und andererseits

$$\frac{\partial}{\partial x}q(x,t) \;=\; u_x\cdot v + u\cdot v_x \;=\; u_x\cdot v(u) + u\cdot v_u\cdot u_x\,.$$

c)

$$v(x,t) \;=\; c + \frac{k}{u(x,t)} \;\Longrightarrow\; q(x,t) = \;c\cdot u(x,t) \;+\; k$$

Nach Teil b) lautet die Kontinuitätsgleichung also

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{dq}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \;=\; \frac{\partial u}{\partial t} + c\cdot\frac{\partial u}{\partial x} \;=0.$$

Alternativ: Direktes Einsetzen in die allgemeine Formel $u_t + q_x = 0$ ergibt

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(c\cdot u(x,t) \;+\; k\right) = \;u_t + c\cdot u_x \;=\; 0.$$

Man erhält also die lineare Transportgleichung.

d) Nach Teil c) dieser Aufgabe lösen wir die Anfangswertaufgabe

$$2u_x + 1u_t = 0, \qquad u(x,0) = e^{-x^2} = u_0(x).$$

mit Hilfe der Charakteristiken- Methode. Auf einer festen Charakteristik $(x(t), t)$ gilt:

$$\dot{x}(t) = 2 \implies x(t) = c + 2t,\ x(0) = c = x_0 = x(t) - 2t\,.$$

Auf einer solchen Geraden ist u konstant, also

$$u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x_0) = u_0(x(t) - 2t) = e^{-(x(t)-2t)^2} \quad .$$

Da dies auf jeder Charakteristik gilt und die Charakteristiken den Raum ausfüllen,, gilt also

$$u(x,t) == e^{-(x-2t)^2}.$$

Freiwillige Probe: Die Anfangsbedingung ist offensichtlich erfüllt. Es gilt

$$u_t(x,t) = e^{-(x-2t)^2} \cdot (-2(x-2t)) \cdot (-2) \text{ und } u_x(x,t) = e^{-(x-2t)^2} \cdot (-2(x-2t))\,.$$

Wir haben also eine Lösung der Anfangswertaufgabe gefunden.

Bemerkung : Dies ist ein sehr einfaches, linearisiertes Modell. Es lässt z.B. beliebig hohe Dichte und beliebig hohe Geschwindigkeit zu.

Aufgabe 2: (Wiederholung DGL I)

a) Sei λ eine beliebige fest vorgegebene reelle Zahl. Bestimmen Sie eine reelle Darstellung der allgemeinen Lösung der Differentialgleichung

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0\,.$$

b) Sei L eine weitere fest vorgegebene positive reelle Zahl. Bestimmen Sie alle Lösungen der Randwertaufgabe

$$y''(t) - \lambda\, y(t) \;=\; 0 \quad y(0) \;=\; y(L) \;= 0\,.$$

Für welche $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt die Randwertaufgabe nichttriviale Lösungen (d.h. Lösungen, die nicht konstant gleich Null sind)?

Die λ-werte, für die es nichttriviale Lösungen gibt, heißen Eigenwerte der Aufgabe. Die zugehörigen Lösungen heißen Eigenfunktionen.

Bemerkung: *Die Lösungen dieser Eigenwertaufgabe werden im Laufe des Semesters immer wieder benötigt!*

Lösung:

a) Nach DGL I berechnen wir das charakteristische Polynom : $\mu^2 - \lambda \;=\; 0$ mit den Nullstellen

$$\mu_{1,2} \;=\; \pm\sqrt{\lambda} \qquad \Longrightarrow y(t) = \begin{cases} c_1\, e^{\sqrt{\lambda}t} \;+\; c_2\, e^{-\sqrt{\lambda}t} & \lambda \;>\; 0\,, \\ c_1 \;+\; c_2 t & \lambda \;= 0\,, \\ c_1\, \cos(\sqrt{-\lambda}t) \;+\; c_2\, \sin(\sqrt{-\lambda}t) & \lambda \;<\; 0\,. \end{cases}$$

b) Im Fall $\lambda \;>\; 0$ folgt aus dem Randwert für $t = 0$ unmittelbar $c_2 = -c_1$. Der Randwert in L liefert dann:

$c_1\, \left(e^{\sqrt{\lambda}L} \;-\; e^{-\sqrt{\lambda}L}\right) \;=\; 0 \Longrightarrow c_1\, \left(e^{2\sqrt{\lambda}L} \;-\; 1\right) \;=\; 0 \;\Longrightarrow\; c_1 = 0$

In diesem Fall gibt es also nur die triviale Lösung $y(t) = 0$

Im Fall $\lambda \;=\; 0$ ist die Lösung eine lineare Funktion. Die einzige lineare Funktion, die sowohl in $t = 0$, als auch in $t = L > 0$ verschwindet, ist wieder die triviale Lösung.

Im Fall $\lambda \;<\; 0$ folgt aus dem Randwert für $t = 0$ unmittelbar $c_1 = 0$. Der Randwert in L liefert dann:

$c_2\, \sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0 \Longrightarrow c_2 = 0 \;\vee\; \sqrt{-\lambda}L = k\pi$

Nichttriviale Lösungen gibt es also nur für $\lambda \;=\; -\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$.

Abfgabe: 15-19.4.