Fachbereich Mathematik **WiSe 2019/20**
Prof. Dr. T. Reis

Klausur Differentialgleichungen II

02. März 2020

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.
Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt
mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$$\sum =$$

Aufgabe 1: [8 Punkte]

a) Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

A) $u_t + 3u^3 u_x = 0,$

B) $u_t + 3x\, u_x = 0,$

C) $u_t + 3\, u_x = 1\,.$

versehen mit der Anfangsbedingung

$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R},$

wobei $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende und stetig differenzierbare Funktion sei.

Für welche der Differentialgleichungen A), B), C) gilt für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe:

(i) Die Lösung ist konstant entlang der Charakteristiken?

(ii) die Charakteristiken sind Geraden?

Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$u_t + u\, u_x = 0\,, \qquad\qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & x < 1, \\ -1 & x \geq 1\,. \end{cases}$$

Lösung: (5 Punkte+ 3 Punkt, Jedes der Teile kann auch alleine genommen werden)

a) Für A) gilt

$\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u$ ist also konstant entlang der Charakteristiken. [**1 Punkt**]

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = 3u^3\,.$

Die Steigung der Charakteristiken ist also Konstant. Es handelt sich um Geraden. [**1 Punkt**]

Für B) gilt $\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u$ ist also konstant entlang der Charakteristiken.

Die Charakteristiken haben die Steigung $\frac{dx}{dt} = 3x\,.$

Die Steigung der Charakteristiken ist nicht Konstant. Es handelt sich nicht um Geraden. [**1 Punkt**]

Für C) gilt

$\frac{du}{dt} = 1 \Longrightarrow u$ ist also nicht konstant entlang der Charakteristiken. [**1 Punkt**]

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = 3$.

Die Steigung der Charakteristiken ist also Konstant. Es handelt sich um Geraden. **[1 Punkt]**

b) Wegen der Unstetigkeit der Daten, erhalten wir eine Stoßfront $(s(t), t)$ mit:

$\dot{s}(t) = \frac{u_l + u_r}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$. **[1 Punkt]**

Also $s(t) = 1 + \frac{t}{2}$. **[1 Punkt]**

Für die Lösung erhalten wir dann

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & x < 1 + \frac{t}{2}, \\ -1 & x \geq 1 + \frac{t}{2}. \end{cases}$$ **[1Punkt]**

Aufgabe 2: [3+ 2 + 7 Punkte]

a) Für welche reellen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$u(x, y) = \sin(4x) \cdot g(y)$$

im gesamten $\mathbb{R}^2$ harmonisch?

b) Berechnen Sie eine Lösung u der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 25u_{xx} &= 0, && x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= 2,\ x \in \mathbb{R}, && u_t(x,0) = 3\cos(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 0 \qquad 0 < x < 3\,, \qquad t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= 0\,, \qquad 0 \le x \le 3\,, \\ u_t(x,0) &= \sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x)\,, \qquad 0 \le x \le 3\,, \\ u(0,t) &= u(3,t) = 0 \qquad t \ge 0. \end{aligned}$$

Lösung:

a) Zu erfüllen ist

$\Delta u(x, y) = u_{xx} + u_{yy} = -16\sin(4x) \cdot g(y) + \sin(4x) \cdot g''(y) = 0.$ **[1 Punkt]**

Also $g''(y) = 16g(y) \implies$

Charakteristisches Polynom: $P(\mu) = \mu^2 - 16.$ **[1 Punkt]**

Lösungen: $g(y) = c_1 e^{4y} + c_2 e^{-4y}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$ **[1 Punkt]**

b) **[2 Punkte]**

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(2+2) + \frac{1}{2 \cdot 5}\int_{x-5t}^{x+5t} 3\cos(\eta)d\eta = 2 + \frac{3}{10}\left(\sin(x+5t) - \sin(x-5t)\right).$$

c) **[7 Punkte]**

Mt $c = 2$, $\omega = \frac{\pi}{3}$ gilt:

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(ck\omega t) + b_k \sin(ck\omega t)) \sin(k\omega x)}$$

Hier also

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\frac{2k\pi}{3} t) + b_k \sin(\frac{2k\pi}{3} t)) \sin(\frac{k\pi}{3} x)$$

Zu erfüllen sind noch die Anfangsbedingungen. Aus

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(\frac{k\pi}{3} x) \stackrel{!}{=} 0\,.$$

folgt $\boxed{a_k = 0 \ \forall k\,.}$ [**2 Punkte**]

Wegen $u_t(x,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \Big(-\frac{2k\pi}{3} a_k \sin(\frac{2k\pi}{3} t) + \frac{2k\pi}{3} b_k \cos(\frac{2k\pi}{3} t) \Big) \sin(\frac{k\pi}{3} x)$

lautet die zweite Anfangsbedingung

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k\pi}{3} b_k \sin((\frac{k\pi}{3} x) \stackrel{!}{=} \sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x)$$ [**2 Punkte**]

Ein Koeffizientenvergleich liefert

$k = 3:$ $\quad 2\pi\, b_3 \stackrel{!}{=} 1 \iff b_3 = \frac{1}{2\pi}$,

$k = 6:$ $\quad 4\pi\, b_6 \stackrel{!}{=} 2 \iff b_6 = \frac{2}{4\pi}$,

und $b_k = 0$ sonst. [**2 Punkte**]

Insgesamt erhalten wir

$$\boxed{u(x,t) = \tfrac{1}{2\pi} \sin(2\pi t) \sin(\pi x) + \tfrac{1}{2\pi} \sin(4\pi t) \sin(2\pi x)\,.}$$ [**1 Punkt**]

Aufgabe 3) [4 Punkte]

a) Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u_t + u \cdot u_x &= 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= g(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Dabei sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion mit zwei Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen).

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(i) Es gibt eine eindeutige schwache Lösung.

(ii) Die Entropielösung gilt für alle Zeiten, also für beliebige $t \in \mathbb{R}^+$.

(iii) Zum Erhalt der Entropielösung muss man zwei Stoßwellen einführen.

Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Sei $\Omega := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\right\}$ und u die Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta u(x,y) = 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \qquad u(x,y) = 2 \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Bestimmen Sie den Wert von u im Ursprung.

Lösung:

a) (i) Die Aussage ist falsch. Erst die Entropiebedingung sorgt für die Eindeutigkeit.

(ii) Die Aussage ist wahr. Man führt zwei Verdünnungswellen ein, die sich nicht in die Quere kommen.

(iii) Falsch: siehe ii).

Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Aus dem Mittelwertsatz folgt $u(0,0) = 2$.