Fachbereich Mathematik **WiSe 2019/2020**
Prof. Dr. T. Reis

Klausur Differentialgleichungen II

02. März 2020

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:																
Vorname:																
Matr.-Nr.:																

Studiengang:	AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		

$\sum =$

Aufgabe 1: [5 + 3 Punkte]

a) Gegeben sind die folgenden Differentialgleichungen für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

A) $u_t + 3u^3 u_x = 0,$

B) $u_t + 3x\, u_x = 0,$

C) $u_t + 3\, u_x = 1\,.$

versehen mit der Anfangsbedingung

$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in \mathbb{R},$

wobei $u_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton steigende und stetig differenzierbare Funktion sei.

Für welche der Differentialgleichungen A), B), C) gilt für die Lösung der zugehörigen Anfangswertaufgabe:

(i) Die Lösung ist konstant entlang der Charakteristiken?

(ii) die Charakteristiken sind Geraden?

Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Berechnen Sie die Lösung der folgenden Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$u_t + u\, u_x = 0\,, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 2 & x < 1, \\ -1 & x \geq 1\,. \end{cases}$$

Aufgabe 2: [3+ 2 + 7 Punkte]

a) Für welche reellen Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$u(x,y) = \sin(4x) \cdot g(y)$$

im gesamten $\mathbb{R}^2$ harmonisch?

b) Berechnen Sie eine Lösung u der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} &u_{tt} - 25u_{xx} = 0, && x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ &u(x,0) = 2,\ x \in \mathbb{R}, && u_t(x,0) = 3\cos(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie eine Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} &u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \qquad 0 < x < 3\,, \qquad t \in \mathbb{R}^+, \\ &u(x,0) = 0\,, \qquad 0 \le x \le 3\,, \\ &u_t(x,0) = \sin(\pi x) + 2\sin(2\pi x)\,, \qquad 0 \le x \le 3\,, \\ &u(0,t) = u(3,t) = 0 \qquad t \ge 0. \end{aligned}$$

Aufgabe 3: [3 + 1 Punkte]

a) Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$, $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} u_t + u \cdot u_x &= 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= g(x), \qquad x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Dabei sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine streng monoton steigende Funktion mit zwei Unstetigkeitsstellen (Sprungstellen).

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist.

(i) Es gibt eine eindeutige schwache Lösung.

(ii) Die Entropielösung gilt für alle Zeiten, also für beliebige $t \in \mathbb{R}^+$.

(iii) Zum Erhalt der Entropielösung muss man zwei Stoßwellen einführen.

Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Sei $\Omega := \left\{(x,y)^T \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\right\}$ und u die Lösung der Randwertaufgabe

$$\Delta u(x,y) = 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \qquad u(x,y) = 2 \qquad \text{auf} \quad \partial\Omega.$$

Bestimmen Sie den Wert von u im Ursprung.