Fachbereich Mathematik **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis

Klausur Differentialgleichungen II

29. August 2019

Sie haben 60 Minuten Zeit zum Bearbeiten der Klausur. In die Wertung gehen maximal 20 Punkte ein.

Bitte kennzeichnen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.

Tragen Sie bitte zunächst Ihren Namen, Ihren Vornamen und Ihre Matrikelnummer in **DRUCKSCHRIFT** in die folgenden jeweils dafür vorgesehenen Felder ein. Diese Eintragungen werden auf Datenträger gespeichert.

Name:

Vorname:

Matr.-Nr.:

Studiengang:

AIW	CI	ET	GES	IIW	MB	MTB	SB	

Ich bin darüber belehrt worden, dass die von mir zu erbringende Prüfungsleistung nur dann bewertet wird, wenn die Nachprüfung durch das Zentrale Prüfungsamt der TUHH meine offizielle Zulassung vor Beginn der Prüfung ergibt.

Unterschrift:

Aufg.	**Punkte**	**Korrekteur**
1		
2		
3		
4		

$\sum =$

Aufgabe 1: [6 + 3 Punkte]

a) Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + 4t\,u_x = 3\,, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+,$$
$$u(x,0) = \sin(2x) \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Stellen Sie zunächst die charakteristischen Differentialgleichungen auf und lösen Sie diese.

(ii) Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$.

b) Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$u_t + (u+1)^2\,u_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$$
$$u(x,0) = \cos(x) \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

(i) Sind die Charakteristiken Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) Geben Sie eine Gleichung für die Charakteristik durch den Punkt $(\pi,0)$ an.

Lösung:

a) (i) Mit der Charakteristiken-Methode rechnet man:
$\frac{dx}{dt} = 4t \Longrightarrow dx = 4tdt \Longrightarrow x = 2t^2 + C_1$ **[1 Punkt]**
$\frac{du}{dt} = 3 \Longrightarrow du = 3dt \Longrightarrow u = 3t + C_2$ **[1 Punkt]**

(ii) Mit $C_1 = x - 2t^2$ und $C_2 = u - 3t$ machen wir den Ansatz
$C_2 = f(C_1)$ **[1 Punkt]**
und erhalten
$u - 3t = f(x - 2t^2)$
und damit die allgemeine Lösung: $u(x,t) = 3t + f(x - 2t^2)$. **[1 Punkt]**
Die Anfangsbedingung verlangt:
$u(x,0) = 0 + f(x-0) = f(x) \stackrel{!}{=} \sin(2x)\,.$ **[1 Punkt]**
$u(x,t) = 3t + \sin(2x - 4t^2).$ **[1 Punkt]**

b) (i) Für die Charakteristiken erhält man, einerseits
$\frac{du}{dt} = 0 \Longrightarrow u$ ist also konstant entlang der Charakteristiken. **[1 Punkt]**

Andererseits haben die Charakteristiken die Steigung $\frac{dx}{dt} = (u+1)^2\,.$
Die Steigung der Charakteristiken ist also konstant. Es handelt sich um Geraden.
[1 Punkt]

(ii) Die Charakteristik durch den Punkt $(\pi,0)$ ist eine Gerade $(x(t),t)$ durch $(\pi,0)$ mit
$\dot{x}(t) = (u(\pi,0)+1)^2 = (\cos(\pi)+1)^2 = (-1+1)^2 = 0\,,$ also die Gerade $x = \pi\,.$
[1 Punkt]

Aufgabe 2: [3 Punkte]

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$3u_{xx} + 8u_{xt} - 3u_{tt} \;=\; 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

a) Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch).

b) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf Diagonalform $\alpha \cdot \tilde{u}_{\eta\eta} + \beta \cdot \tilde{u}_{\tau\tau} = 0$.

Lösung:

$$3u_{xx} + 8u_{xt} - 3u_{tt} \;=\; 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0\,.$$

a) [**1 Punkt**] Aus

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \implies \det(A) = -9 - 16 < 0$$

folgt, dass es sich um eine hyperbolische Differentialgleichung handelt.

b) Eigenwerte von A: [**1 Punkt**]

$(3-\lambda)(-3-\lambda) - 16 = 0 \implies \lambda^2 - 25 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \mp 5\,.$

Als Diagonalform erhält man also [**1 Punkt**]

$$-5\tilde{u}_{\eta\eta} + 5\tilde{u}_{\tau\tau} = 0$$

Aufgabe 3: [8 Punkte]

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \sin(\pi x), && 0 < x < 2\,,\ t \in \mathbb{R}^+\,, \\ u(x,0) &= 5\sin(\pi x) && 0 \le x \le 2, \\ u(0,t) &= 0 && t \in \mathbb{R}^+, \\ u(2,t) &= 0 && t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Lösung:

Ansatz $u(x,t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k(t)\ \sin(\frac{k\pi}{L}x)$.

Wobei hier $L = 2$ ist.

Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung ergibt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\dot{a}_k(t) + \frac{k^2\pi^2}{2^2}\, a_k(t)\right) \sin(\frac{k\pi}{2}x) \stackrel{!}{=} \sin(\pi x). \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Koeffizientenvergleich ergibt:

$\dot{a}_k(t) + \frac{k^2\pi^2}{4}\, a_k(t) \;=\; 0\,, \qquad \forall k \neq 2$ **[1 Punkt]**

und

$\left(\dot{a}_2(t) + \frac{2^2\pi^2}{4}\, a_2(t)\right) \sin(\frac{2\pi}{2}x) \stackrel{!}{=} \sin(\pi x)$

Also $\quad \dot{a}_2(t) + \pi^2\, a_2(t) \stackrel{!}{=} 1.$ **[1 Punkt]**

Die Anfangsdaten liefern

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0)\ \sin(\frac{k\pi}{2}x) \stackrel{!}{=} 5\sin(\pi x).$$

Also $a_k(0) \;=\; 0\,, \qquad \forall k \neq 2$ und $a_2(0) = 5.$ **[1 Punkt]**

<u>Für $k \neq 2$</u> erhalten wir die Anfangswertaufgabe

$\dot{a}_k(t) + \frac{k^2\pi^2}{L^2} a_k(t) = 0,\ a_k(0) = 0$

mit der Lösung $a_k \equiv 0$. **[1 Punkt]**

<u>Für $k = 2$:</u>

$\dot{a}_2(t) + \pi^2 a_2(t) = 1,\ a_2(0) = 5$

Die homogene Differentialgleichung $\quad \dot{a}_{2h} + \pi^2\, a_{2h}(t) \stackrel{!}{=} 0$

liefert die allgemeine Lösung $a_{2h}(t) = \gamma e^{-\pi^2 t}$. **[1 Punkt]**

Mit einem konstanten Ansatz erhalten wir noch die partikuläre Lösung $a_{2p}(t) = \frac{1}{\pi^2}$.

Alternativ: Der Ansatz $a_{2p}(t) = \gamma(t)e^{-\pi^2 t}$ *liefert eingesetzt in die Differentialgleichung*

$\dot{\gamma}(t)e^{-\pi^2 t} \overset{!}{=} 1 \implies \dot{\gamma}(t) = e^{\pi^2 t} \implies \gamma(t) = \frac{1}{\pi^2}e^{\pi^2 t} \implies a_{2p}(t) = \frac{1}{\pi^2}$.

Die Anfangsbedingung liefert dann $\gamma e^0 + \frac{1}{\pi^2} \overset{!}{=} 5 \implies \gamma = 5 - \frac{1}{\pi^2}$. **[1 Punkt]**

Die Lösung der PDE ist also:

$$u(x,t) = \left(\left(5 - \frac{1}{\pi^2}\right)e^{-\pi^2 t} + \frac{1}{\pi^2}\right) \sin(\pi x). \qquad \textbf{[1 Punkt]}$$

Aufgabe 4) [2+2 Punkte]

a) Wie lautet die Sprungbedingung für die schwache Lösung von

$$u_t + (u^3)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 4 & \text{für } x \leq 0, \\ 2 & \text{für } x > 0\,? \end{cases}$$

b) Es seien $\tilde{u}$ und $\hat{u}$ Lösungen der folgenden Randwertaufgabe für $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 1, \qquad x \in (0,\pi),\, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{1}$$

Ist dann auch $\tilde{u} + \hat{u}$ eine Lösung des Randwertproblems (1)?
Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

a) Mit $f(u) = u^3$ lautet die Sprungbedigung für eine Stoßfront:

$\dot{s}(t) = \dfrac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} = \dfrac{4^3 - 2^3}{4 - 2} = 2 \cdot 16 - 4 = 28.$ **[2 Punkte]**

b) Nein. Die Differentialgleichung ist zwar linear aber nicht homogen. Für $v := \tilde{u} + \hat{u}$ erhält man

$v_t - v_{xx} = 1 + 1 \neq 1.$