Aufgabe 1: [6 + 3 Punkte]

a) Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t + 4t\, u_x &= 3\,, \qquad && x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+, \\ u(x,0) &= \sin(2x) && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

  (i) Stellen Sie zunächst die charakteristischen Differentialgleichungen auf und lösen Sie diese.

  (ii) Berechnen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$.

b) Gegeben ist die folgende Anfangswertaufgabe für $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t + (u+1)^2\, u_x &= 0, \qquad && x \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) &= \cos(x) && x \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

  (i) Sind die Charakteristiken Geraden? Begründen Sie Ihre Antwort.

  (ii) Geben Sie eine Gleichung für die Charakteristik durch den Punkt $(\pi, 0)$ an.

Aufgabe 2: [3 Punkte]

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$3u_{xx} + 8u_{xt} - 3u_{tt} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

a) Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch).

b) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf Diagonalform $\alpha \cdot \tilde{u}_{\eta\eta} + \beta \cdot \tilde{u}_{\tau\tau} = 0$.

Aufgabe 3: [8 Punkte]

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangsrandwertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= \sin(\pi x) \qquad && 0 < x < 2\,,\ t \in \mathbb{R}^+\,, \\ u(x,0) &= 5\sin(\pi x) && 0 \le x \le 2, \\ u(0,t) &= 0 && t \in \mathbb{R}^+, \\ u(2,t) &= 0 && t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Bitte Beachten Sie Seite 3!

Aufgabe 4) [2+2 Punkte]

a) Wie lautet die Sprungbedingung für die schwache Lösung von

$$u_t + (u^3)_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 4 & \text{für } x \leq 0, \\ 2 & \text{für } x > 0\,? \end{cases}$$

b) Es seien $\tilde{u}$ und $\hat{u}$ Lösungen der folgenden Randwertaufgabe für $u(x,t)$:

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 1, \qquad x \in (0,\pi),\, t \in \mathbb{R}^+, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{1}$$

Ist dann auch $\tilde{u} + \hat{u}$ eine Lösung des Randwertproblems (1)?
Begründen Sie Ihre Antwort.