Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 5, Hausaufgaben

Aufgabe 1:

a) Sei u die Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= -1 & |x| < 1, |y| < 1, \\ u(x,y) &= 0 & |x| = 1 \text{ oder } |y| = 1 \end{aligned}$$

und $v(x,y) = u(x,y) + \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$.

Zeigen Sie, dass $v(x,y)$ die Laplace-Gleichung löst, und bestimmen Sie eine obere und eine untere Schranke für $u(0,0)$.

b) Sei $u(x,y)$ eine Lösung der folgenden Randwertaufgabe:

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0, & \text{in } \Omega :=]0,2[\times]0,1[\\ u(x,y) &= 3x^2 & \text{auf } \partial\Omega\,. \end{aligned}$$

Entscheiden Sie, ohne u zu berechnen, für jede der folgenden Aussagen, ob sie zutreffend ist. Begründen Sie Ihre Antworten.

- Es gilt $\max_{(x,y)\in\bar{\Omega}} u(x,y) = 2$.
- Es gilt $\min_{(x,y)\in\bar{\Omega}} u(x,y) = 0$.
- $u(x,y) = 3x^2 - 3y^2$ ist eine Lösung der Randwertaufgabe.

Aufgabe 2:

a) Bestimmen Sie alle rotationssymmetrischen Lösungen der folgenden Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= -\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{für } 1 < x^2 + y^2 < 9, \\ u(x,y) &= 1 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 1, \\ u(x,y) &= 2 \quad \text{auf } x^2 + y^2 = 9. \end{aligned}$$

Hinweise: Die Laplace-Gleichung in Polarkoordinaten lautet $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi} = 0$.
Rotationssymmetrisch heißt unabhänging von ϕ

b) Bestimmen Sie eine Lösung der folgenden Aufgabe

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{für } 0 \le x^2 + y^2 \le 9, \\ u(x,y) &= \frac{x}{9}\,(x-y) \quad \text{auf } x^2+y^2 = 9\,. \end{aligned}$$

Hinweise: Verwenden Sie Polarkoordinaten und einen geeigneten Produktansatz! Die Lösung ist NICHT rotationssymmetrisch!

$\cos(2\phi) = 2\cos^2(\phi) - 1$, $\sin(2\phi) = 2\sin(\phi)\cos(\phi)$.

Verwenden Sie zur Lösung einer Differentialgleichung der Form
$r^2 v''(r) + \alpha r v'(r) - \beta v(r) = 0$ *mit* $\beta \neq 0$
den Ansatz $v(r) = r^m$.

Abgabe bis: 21.06.19