Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg **SoSe 2019**
Prof. Dr. T. Reis
Dr. H. P. Kiani

Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Blatt 4, Präsenzaufgaben

Aufgabe 1)

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$u_{xx} + 4u_{xt} + u_{tt} = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}, t > 0$$

a) Bestimmen Sie den Typ der Differentialgleichung (elliptisch, hyperbolisch oder parabolisch).

b) Transformieren Sie die Differentialgleichung auf Diagonalform $\alpha \cdot \tilde{u}_{\eta\eta} + \beta\tilde{u}_{\tau\tau} = 0$.

c) Wie hängen die neuen Koordinaten η, τ von den alten Koordinaten t, x ab?

Aufgabe 2:

Aus der Vorlesung kennen Sie die Formel für die Lösung der Anfangswertaufgabe für die (homogene) Wellengleichung.

Die Funktion

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

löst die folgende Anfangswertaufgabe

$$\tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} = h(x,t) \qquad \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) = 0\,. \tag{2}$$

(Beweis: Leibniz-Formel für die Ableitung parameterabhängiger Integrale)

Zu lösen sei die Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_{tt} - 4u_{xx} &= 6x\sin t, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) &= x,\ x \in \mathbb{R}, & u_t(x,0) = \sin(x),\ x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

a) Berechnen Sie eine Lösung $\tilde{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - 4\tilde{u}_{xx} &= 6x\sin t, & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ \tilde{u}(x,0) &= 0,\ x \in \mathbb{R}, & \tilde{u}_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b) Berechnen Sie eine Lösung $\hat{u}$ der Anfangswertaufgabe

$$\hat{u}_{tt} - 4\hat{u}_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t > 0$$
$$\hat{u}(x,0) = x,\; x \in \mathbb{R}, \qquad \hat{u}_t(x,0) = \sin(x),\; x \in \mathbb{R}.$$

c) Zeigen Sie durch einsetzen von u in die Differentialgleichung und Überprüfung der Anfangswerte, dass $u = \tilde{u} + \hat{u}$ die Anfangswertaufgabe (2) löst.

Bearbeitung am 28.05- 31.05.2019