Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

SoSe 19
12.07.2019

Klausurberatung Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die ins Netz gestellten Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig und möglicherweise irreführend!

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt nicht!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Absolut notwendige Techniken

- Einfache gewöhnliche DGL lösen, zum Beispiel
  - Separierbare (vgl. z. B. Charakteristiken Methode)
  - Lineare mit konstanten Koeffizienten (vgl. z. B. Wärmeleitungsgleichung)

$$\dot{y}(t) + \alpha y(t) = \overset{c_n(t)}{p_n(t)} \cdot e^{\mu t}, \qquad p_n \text{ Polynom n-ten Gerades}$$

$\dot{y}_h + \alpha y_h = 0 \qquad \dot{y}_h = -\alpha y_h$

$y_h(t) = \gamma e^{-\alpha t}$

Ansatz: $y_p(t) = \gamma(t)e^{-\alpha t}$ $\xrightarrow{\text{Einsetzen in Dgl}}$ $\dot{\gamma}(t) e^{-\alpha t} = p_n(t) e^{\mu t}$

oder,

vorausgesetzt $-\alpha \neq \mu$: $y_p(t) = \underbrace{(d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \ldots + d_n t^n) \cdot e^{\mu t}}_{\text{Einsetzen in Dgl} \longrightarrow d_0, \ldots, d_n}$

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

z. B. $c_n(t) = 2t^2 = 2t^2 e^{0 \cdot t}$

γ über Anfangswert bestimmen!

Ansatz $y_p(t) = (a t^2 + bt + c) e^{0 \cdot t}$

$\xrightarrow{\text{Dgl}} a, b, c \longrightarrow y_p \longrightarrow y$

- Ganz einfache Integrale, partielle Integration

  Zum Beispiel für d'Alembert, Fourierkoeffizienten, Charakteristiken

- Fourier-Koeffizienten berechnen (Blätter 5 und 6)

- polar $<--->$ kartesisch (Blatt 5)

  $x^2+y^2 \leq 9$
  $y \geq 0$

  $x = r\cos(\varphi)$
  $y = r\sin(\varphi)$
  $0 \leq r \leq 3$
  $0 \leq \varphi \leq \pi$

- Determinante/Eigenwerte von 2x2 Matrizen (Blatt 4)

  $\downarrow$ Klassifikation
  parabolisch
  elliptisch
  hyperbolisch

Blatt 1:

P1: Transpotgleichung $u_t - cu_x = 0$

muss man können

geht inzwischen auch

mit "erweitertem"

Problem → Blatt 2

$\frac{du}{dt} = 0$, u konstant auf Charakteristik

P2: $xu_t - tu_x = 0$ Charakteristikengleichungen/-skizzen, Lösen der AWA

H1: Verkehrsmodel, Kontinuitätsgleichung

∅

H2: Lösungen Eigenwertaufgabe $y'' = \lambda y$, $y(0) = y(L) = 0$

∅ diente nur der Vorbereitung der Produktansätze

Blatt 2:

xxx

P1, P2, H1: Charakteristiken-Methode, AWA: lösen über erweitertes Problem

P3: Vorbereitung Burgers Gleichung: sollte inzwischen kein Problem sein

xxx

H2: Charakteristiken-Methode, Viertelebene, Laplace-Transformation $\emptyset$

Blatt 3:

xxx

P1: Erhaltungsgleichung, Charakteristiken, Sprungbedingung, Entropielösung

sind es Geraden, zeichnen

P2: Burgers Gleichung: zwei Verdünnungswellen, zwei Stoßwellen xxx

H1a: Burgers Gleichung: Verdünnungswellen **und** Stoßwelle Nur bis Stoß auf Verdünnung trifft

H1b: Burgers Gleichung: Irreversibiltät mittels Zeichnen der Charakteristiken feststellen $\emptyset$

H2: Verkehrsmodell, nicht konvexe Flussfunktion

H2a: Kontinuitätsgleichung aufstellen $\emptyset$

H2b: Sind die Charakteristiken Geraden? xxx

bei gegebener Dgl

H2c: Charakteristiken skizzieren xxx

H2d: Entropiebedingung $\emptyset$

Blatt 4:

P1: Transformation auf Diagonalform und Typ bestimmen xxx
(parabolisch, elliptisch, hyperbolisch)

genau lesen:
Was ist gefragt: Nur Matrixform?
Nur Diagonaform?
Oder auch neue Koordinaten?

P2: AWA Wellengleichung $x \in \mathbb{R}$
P2a) Inhomogene Differentialgleichung $\emptyset$
P2b) Homogene Differentialgleichung, d'Alembert xxx
P2c) Zusammensetzen $\emptyset$

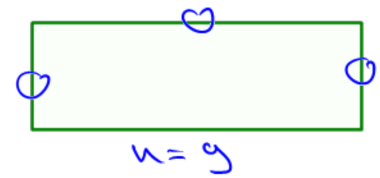
H1: Typ (parabolisch, elliptisch, hyperbolisch) bestimmen xxx

H2a: AWA Wellengleichung, d'Alembert xxx

H2b: AWA Wellengleichung, d'Alembert, unstetige Daten, Skizze $\emptyset$

Blatt 5:

P1: Laplace-Gleichung auf Rechteck,
Randwerte auf einer Kante $\neq 0$



Ansatz abhängig davon auf welcher Kante $u \neq 0$ ist

P2: Prüfen ob Funktion harmonisch ist, Mittelwerteigenschaft

xxx

H1a: Min/Max für Lösung der Poisson Gleichung

$\emptyset$

H1b: RWA Laplace Gleichung: Maximum Prinzip

gut für 4 Punkte Teil

H2a: Rotationssymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung auf Ringsektor

xxx

H2b: Laplace-Gleichung auf Kreisscheibe

geschlossene Lösungsdarstellung

Seite 17

Blatt 6:

P: ARWA Wärmeleitung, inhomogene Randdaten und inhomogene DGl xxx

H1: Herleitung Lösungsansatz für Neumann-Randbedingungen $\emptyset$

H2: Wellengleichung: homogene Randdaten und inhomogene DGl xxx

In der Klausur: direkt die in Vorlesung/HÜ erarbeiteten Lösungsformeln verwenden!

Zusammenstellung einiger (nicht aller) geschlossener Lösungsformeln (ohne Gewähr, bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!)

Wellengleichung:

A) AWA, homogen:

$\tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = 0$, $\tilde{u}(x,0) = f(x)$, $\tilde{u}_t(x,0) = g(x)$, $\underline{\underline{x \in \mathbb{R}}}$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\alpha)\, d\alpha$$

B) AWA, inhomogen: $u_{tt} - cu_{xx} = h(x,t) \not\equiv 0$ $\emptyset$

B) ARWA, homogene Differentialgleichung, homogene Randwerte:

Blatt 6H, Aufg 2

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in (0, L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = w_0(x) \qquad x \in (0, L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \qquad \omega := \frac{\pi}{L}$$

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right] \sin(k\omega x)}$$

erfüllt DgL

sorgt dafür, dass Randbedingungen erfüllt sind

Anfangsbedingungen: $$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} u_0(x)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} ck\omega \cdot B_k \sin(k\omega x) \stackrel{!}{=} w_0(x)$$

mit konkreten u_0, v_0 hinschreiben und wenn möglich

Eventuell Koeffizientenvergleich möglich. Sonst:

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\alpha) \sin(k\omega\alpha)\, d\alpha, \quad B_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L w_0(\alpha) \sin(k\omega\alpha)\, d\alpha$$

bzw. $B_k = \dfrac{L}{ck\pi} b_k$ mit $b_k = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L w_0(\alpha) \sin(k\omega\alpha)\, d\alpha,$

C) Inhomogene Differentialgleichung, **homogene** Randdaten $\not\emptyset$

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t) \not\equiv 0 \qquad c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0$$

D) ARWA, inhomogene Randwerte:

$$\left.\begin{array}{lll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t), & & x \in (0,L),\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & u_t(x,0) = v_0(x) & x \in (0,L) \\ u(0,t) = f(t) & u(L,t) = g(t) & t > 0 \end{array}\right\} \quad (*)$$

f und/oder g $\not\equiv 0$

Randwerte homogenisieren

$$w(x,t) = u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}(g(t) - f(t))$$

Alle u-Ausdrücke in $(*)$ in w-Ausdrücke umschreiben

vgl Präsenzaufg. Blatt 6

ergibt neue Aufgabe für w mit homogenen Randwerten.

Wärmeleitungsgleichung
I) ARWA, inhomogene Differentialgleichung, homogene Randwerte :

Präsenzblatt 6

$$u_t - cu_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

Ansatz: $\boxed{u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{a_n(t)}_{?} \sin(n\omega x)}$ $\qquad \omega = \frac{\pi}{L}$

Die $a_n(t)$ sind gesucht!

liefert die Anfangswertaufgaben

$$\boxed{\dot{a}_n(t)(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) = c_n(t), \quad a_n(0) = b_n}$$

Fourier Koeffizienten von $h(x,t)$, $u_0(x)$ müssen bestimmt werden.
Wenn möglich über

Wenn möglich die c_n und/oder b_n über Koeffizientenvergleich in

$$h(x,t) \stackrel{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\, \sin(n\omega x)\,,$$

und/oder

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cancel{(t)}\, \sin(n\omega x) \stackrel{!}{=} u_0(x) \qquad \text{bestimmen.}$$

Wenn Koeffizientenvergleich nicht möglich, dann über

$$c_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L h(x,t)\, \sin(n\omega x)dx$$

bzw.

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\, \sin(n\omega x)dx$$

Wenn $c_n(t), b_n$ bestimmt worden sind, löse die gewöhnlichen DgL/AWA

$$\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) = c_n(t)$$
$$a_n(0) = b_n$$

Für alle n mit $c_n(t) = b_n = 0$ wähle $a_n(t) \equiv 0$

Für die n mit $c_n(t)$ und/oder $b_n \neq 0$ löse zugehörige AWA'n $\longrightarrow a_n(t)$

Einsetzen der $a_n(t)$ in den Anatz liefert u

II) ARWA, inhomogene Randwerte:

$$u_t - c\tilde{u}_{xx} = h(x,t), \qquad \tilde{}x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = f(t) \qquad u(L,t) = g(t) \qquad t > 0$$

(**)

f und/oder g $\not\equiv 0$

Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) = u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}(g(t) - f(t))$$

Alle u-Ausdrücke in (**) in v-Ausdrücke umrechnen

ergibt neue Aufgabe für v mit homogenen Randwerten.

Laplacegleichung auf Ringen, Kreissegmenten, Innerhalb oder außerhalb von Kreisscheiben etc.

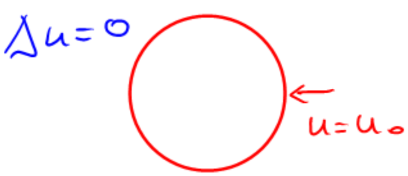
Hausaufgabe 2
Blatt 5

Laplace Operator in Polarkoordinaten:

$$\boxed{r^2 \cdot \Delta u = 0 \iff r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0\,.}$$

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + \cancel{d_0 \ln(r)} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} + d_k \cancel{r^k})(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))}$$

Je nach Gebiet müssen nicht beschränkte Summanden ausgeschlossen werden. Siehe unten.



z. B. $\Delta u = 0$ für $x^2 + y^2 > 4$

$u(x,y) = \frac{y^2 - x^2}{4}$ für $x^2 + y^2 = 4$

$= u_0(x,y)$

Umschreiben in $\Delta u = 0$ für $r > 2$

$x = r\cos(\varphi)$ $\quad y = r\sin(\varphi)$

$u(2,\varphi) = (r^2 \sin^2\varphi - r^2 \cos^2\varphi)/4$

$2 < r < \infty$ für $r \to \infty$: $\ln(r)$ und $r^k \to \infty$ für $k > 0$

$\longrightarrow$ streiche diese Terme

Charakteristikenmethode

Blätter 2

1. $u_t(x,t) + a(x,t,u)\,u_x(x,t) = b(x,t,u)\,.$

Hilfsproblem :

$$U_t + a \cdot U_x + b \cdot U_u = 0 \tag{1}$$

$$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = a(x,t,u), \qquad \frac{du}{ds} = b(x,t,u)$$

oder (mit t als Parameter)

$$\boxed{\frac{dx}{dt} = a(x,t,u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = b(x,t,u).} \tag{2}$$

2 gewöhnliche Dgl: lösen/integrieren
→ Integrationskonstanten c_1, c_2

Lösen/Integrieren liefert $C_1(x,t,u), C_2(x,t,u)$

Setze $\boxed{C_2 = f(C_1)}$ Allgemeine Lösung der Dgl

und besimme f mit Hilfe der Anfangsbedingung

Burgers und ähnliche Gleichungen, Verdünnungs- und Stoßwellen

$$u_t(x,t) + u\,u_x(x,t) = 0\,.$$

Spezialfall von $u_t + (f(u))_x = 0$ mit $f(u) = \frac{u^2}{2}$

$$\frac{dx}{dt} = u(x(t),t) = u\,, \qquad \frac{du}{dt} = 0. \tag{3}$$

Charakteristikensteigung hängt nur von u ab

u ist konstant auf Charakteristik

Charakteristiken sind Geraden.

weil Steigung $= u$ und u konstant auf Charakteristik

Oft sind Skizzen hilfreich

Sprungbedingung für allgemeine Erhaltungsgleichung

Entropielösung

$$\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$$

Für Burgers $\frac{u_l + u_r}{2}$