Dr. Hanna Peywand Kiani

Hörsaalübung 6 Differentialgleichungen II

Wärmeleitungsgleichung und Wellengleichung
28.06.2019

Die ins Netz gestellten Kopien der Anleitungsfolien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Die Anfangsrandwertaufgabe für die Wärmeleitungsgleichung

$$
\begin{aligned}
u_t - cu_{xx} &= h(x,t) && c>0,\ t>0,\ x\in(a,b) \text{ bei uns } (0,L)\\
u(x,0) &= u_0(x) && x\in(a,b),\\
u(a,t) &= f(t) && t>0,\\
u(b,t) &= g(t) && t>0,
\end{aligned}
$$

c : Wärmeleitfähigkeit / Diffusionskoeffizient

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= \frac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2} + 4\sin(2x) && 0<x<\pi,\ t\in\mathbb{R}^+,\\
u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(6x) && 0<x<\pi\,,\\
u(0,t) &= \frac{1}{t+1} && t>0,\\
u(\pi,t) &= 0 && t>0.
\end{aligned}
$$

Schritt 1) Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) := u(x,t) - \left[f(t) + \frac{x}{L}\left(g(t) - f(t)\right) \right]$$

$$v(0,t) = u(0,t) - f(t) - \frac{0}{L}\left(g(t) - f(t)\right)$$

$$v(L,t) = u(L,t) - f(t) - \frac{L}{L}\left(g(t) - f(t)\right)$$

Neue DGL für v mit $a = 0$ und $b = L$:

$$u(x,t) := v(x,t) + f(t) + \frac{x}{L}\left(g(t) - f(t)\right)$$

$$u_t(x,t) := v_t(x,t) + \dot{f}(t) + \frac{x}{L}\left(\dot{g}(t) - \dot{f}(t)\right)$$

$$u_x(x,t) := v_x(x,t) + 0 + \frac{1}{L}\left(g(t) - f(t)\right)$$

$u_{xx}(x,t) := v_{xx}(x,t)$

DGL : $\quad v_t - cv_{xx} = h(x,t) - \dot{f}(t) - \frac{x}{L}\left(\dot{g}(t) - \dot{f}(t)\right) =: \tilde{h}(x,t)$

Neue Anfangswerte für: $v(x,t) := u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}\left(g(t) - f(t)\right)$

$$v(x,0) = u(x,0) - f(0) - \frac{x}{L}\left(g(0) - f(0)\right) =: v_0(x).$$

Das neue Problem besteht aus : i. d. R. inhomogener DGL, inhomogene Anfangswerte, **homogene Randdaten**

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= \frac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2} + 4\sin(2x) && 0 < x < \pi,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) &= 1 - \frac{x}{\pi} + \sin(6x) && 0 < x < \pi\,, \\
u(0,t) &= \frac{1}{t+1} && t > 0, \\
u(\pi,t) &= 0 && t > 0.
\end{aligned}
$$

Schritt 1) Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) := u(x,t) - f(t) - \frac{x-a}{b-a}\,(g(t) - f(t))$$

Neue Aufgabe für $v(x,t) = u(x,t) - \dfrac{1}{t+1}\left(1 - \dfrac{x}{\pi}\right)$

DGL für u: $u_t - u_{xx} = \dfrac{x-\pi}{\pi\,(t+1)^2} + 4\sin(2x)$

$v_t(x,t) =$

$v_t - v_{xx} =$

$v(x,0) =$

$v(0,t) = u(0,t) - \dfrac{1}{t+1} =$

$v(\pi,t) = u(\pi,t) - \dfrac{1}{t+1}\left(1 - \dfrac{\pi}{\pi}\right) = 0.$

Schritt 2)

$$\begin{aligned} v_t - c\; v_{xx} &= \tilde{h}(x,t) \\ v(x,0) &= v_0(x) \\ v(0,t) &= v(L,t) = 0\,. \end{aligned}$$

homogene Randwerte werden erfüllt von: $\boxed{p_n(x) = \sin(n\omega x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$

Wir machen den Ansatz: $\boxed{v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) \sin(n\omega x)}$

Einsetzen in die DGL $v_t - cv_{xx} = \tilde{h}(x,t)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t)] \sin(n\omega x) = \tilde{h}(x,t)$$

Setze $\tilde{h}$ ungerade $2L-$period. fort und berechne Fourier Reihe bzgl. x

$$F_{\tilde{h}}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(n\omega x)$$

Koeffizientenvergleich liefert für jedes a_n eine lineare DGL erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$$\boxed{\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) = c_n(t)}$$

Die Lösung muss noch die Anfangswerte erfüllen

$$v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\sin(n\omega x) = v_0(x)$$

Setze v_0 ungerade $2L-$period. fort und berechne Fourier Reihe

$$F_{v_0}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$$

Die $a_n(0)$ sind als die Fourier Koeffizienten der ungeraden, $2L-$periodischen Fortsetzung von v_0:

$$\boxed{a_n(0) = b_n = \frac{2}{L}\int_0^L v_0(x)\sin(n\omega x)\,dx}$$

Löse die Anfangswertaufgaben mit gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\boxed{\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) = c_n(t),\; a_n(0) = b_n}$$

und setze ein in den Ansatz:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(n\omega x)$$

Schritt 3: Zusammensetzen zur Lösung des ursprünglichen Problems :

$$u(x,t) = v(x,t) \;+\; f(t) \;+\; \frac{x}{L}\,(g(t) - f(t))$$

Beispiel:)

$$v_t - v_{xx} = 4\sin(2x), \qquad x \in (0,\pi),\ t > 0$$

$$v(x,0) \ = \ \sin(6x) \qquad x \in [0,\pi]$$

$$v(0,t) \ = \ v(\pi,t) \ = \ 0, \qquad t \geq 0$$

Ansatz:

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\sin(n\omega x)$$

Löse die Anfangswertaufgaben

$$\dot{a}_n(t) + cn^2\omega^2 a_n(t) = c_n(t),\ \ a_n(0) = b_n$$

b_n: Fourier Koeffizienten der ungeraden, $2L-$periodischen Fortsetzung von v_0:

$$\sin(6x) \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$$

$c_n(t)$: Fourier Koeff'n der ungeraden, $2L-$periodischen Fortsetzung von $\tilde{h}(x,t)$:

$$4\sin(2x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\sin(nx)$$

Löse:

$$\dot{a}_2(t) + 2^2\omega^2 a_2(t) = \; c_2(t) \;=\; 4,\;\; a_2(0) = \; b_2 \; = 0$$

$$\dot{a}_6(t) + 6^2\omega^2 a_6(t) = \; c_6(t) \;=\; 0,\;\; a_6(0) = \; b_6 \; = 1$$

$$\dot{a}_n(t) + n^2\omega^2 a_n(t) = \ c_n(t) \ = \ 0, \ a_n(0) = \ b_n \ = 0 \qquad n \notin \{2, 6\}$$

Lösung: $v(x,t) =$

$$u(x,t) = v(x,t) + f(t) + \frac{x-a}{b-a}\left(g(t) - f(t)\right)$$

mit $f(t) = \frac{1}{1+t}$, $g(t) = 0$, $a = 0$, $b = L$.

Falls $\tilde{h}$ von t abhängt:

Anfangsrandwertaufgabe für die Wellengleichung

Falls Randwerte inhomogen: wie oben homogenisieren!

zunächst: **homogene** Dgl. mit **homogenen** Randdaten

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 && c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0 \\
u(x,0) &= u_0(x) && x \in (0,L), \\
u_t(x,0) &= v_0(x) && x \in (0,L), \\
u(0,t) &= 0 && t > 0, \\
u(L,t) &= 0 && t > 0,
\end{aligned}
$$

Produktansatz $u_k(x,t) = p_k(x) \cdot q_k(t)$ liefert wie bei Wärmeleitung

nichttriviale Lösungen nur:

$$\boxed{p_k(x) = \sin(k\omega x) \qquad \omega = \pi/L, \quad \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 = (k\omega)^2, \quad k \in \mathbb{N}}$$

passend zu den p_k-s erhält man über $\dfrac{\ddot{q}_k}{q_k} = c^2 \dfrac{p_k''}{p_k} = -c^2 \lambda_k$

$q_k(t) = A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)$

$$u_k(x,t) := p_k(x) \cdot q_k(t) = (A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)) \sin(k\omega x)$$

$k \in \mathbb{N}$ löst DGL + homogene RB'n. D.h.:

$$\begin{aligned} (u_k)_{tt} - c^2 (u_k)_{xx} &= 0 && c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0 \\ u_k(0,t) &= 0 && t > 0, \\ u_k(L,t) &= 0 && t > 0. \end{aligned}$$

DGL homogen und linear, RB'n homogen $\longrightarrow$ Linearkombis der u_k lösen auch die DGl. und erfüllen auch die Randbedingungen

$$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}}$$

löst DGL + RB'n.

Zu erfüllen bleiben die Anfangsbedingungen.

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(0) + B_k \sin(0)\right) \cdot \sin(k\omega x) = u_0(x) \qquad x \in [0,L]$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega x) = u_0(x) \qquad x \in [0,L],\, \omega = \frac{\pi}{L}$$

Die A_k sind bei glatten Anfangswerten die Fourier-Koeffizienten der ungeraden $2L-$periodischen Fortsetzung von u_0

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\psi) \sin\left(\frac{k\pi\psi}{L}\right) \, d\psi$$

Die zweite Anfangsbedingung liefert wegen

$$u_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-ck\omega A_k \sin(ck\omega t) + ck\omega B_k \cos(ck\omega t)) \cdot \sin(k\omega x)$$

$$u_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot (ck\omega) \sin(k\omega x) = v_0(x)$$

mit den Fourier-Koeffizienten der ungeraden $2L-$periodischen Fortsetzung von v_0

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(\psi) \sin\left(\frac{k\pi\psi}{L}\right) \, d\psi$$

muss also gelten

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \frac{ck\pi}{L} \sin(\frac{k\pi}{L}x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

oder $\qquad B_k = \frac{L}{ck\pi} b_k \; = \tfrac{2}{ck\pi} \int_0^L v_0(\psi) \sin\left(\frac{k\pi\psi}{L}\right) \, d\psi$

Damit erhalten wir die Lösung $u(x,t)$von

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 & & c>0,\ x\in(0,L),\ t>0 \\
u(x,0) &= u_0(x), & u_t(x,0) &= v_0(x) & x &\in (0,L), \\
u(0,t) &= 0, & u(L,t) &= 0 & t &> 0,
\end{aligned}
$$

als

$$
\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos(ck\omega t) + B_k \sin(ck\omega t)\right) \cdot \sin(k\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}}
$$

$$
\boxed{A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\psi) \sin\left(\frac{k\pi\psi}{L}\right) d\psi, \qquad B_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L v_0(\psi) \sin\left(\frac{k\pi\psi}{L}\right) d\psi}
$$

Achtung: Superposition (Linearkombi von Lösungen der DGL + RB = Lösung der DGL + RB) funktioniert NUR bei homogener DGL mit homogenen Randwerten

Inhomogene Differentialgleichung mit **homogenen** Randdaten

$$\begin{aligned}
u_{tt} - c^2 u_{xx} &= h(x,t) && c>0,\ x\in(0,L),\ t>0\\
u(x,0) &= u_0(x) && x\in(0,L),\\
u_t(x,0) &= v_0(x) && x\in(0,L),\\
u(0,t) &= 0 && t>0,\\
u(L,t) &= 0 && t>0,
\end{aligned}$$

Ansatz $$\boxed{u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t)\sin(k\omega x)}$$

Führt wie oben zu einen System gewöhnlicher DGL

$$\ddot{q}_k(t) + c^2 k^2 \omega^2 q_k(t) \;=\; c_k(t), \qquad q_k(0) = a_k,\ \dot{q}_k(0) = b_k$$

$$a_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin(k\omega x)\, dx.$$

$$b_k = \frac{2}{L} \int_0^L v_0(x) \sin(k\omega x)\, dx.$$

$$c_k(t) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x,t) \sin(k\omega x)\, dx.$$

Beispiel 1: (Klausur 2006 Oberle/Kiani)

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= 4u_{xx} && 0 < x < 1,\ t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) &= x - \sin(\pi x) && 0 \le x \le 1\,, \\
u_t(x,0) &= 3\sin(2\pi x) && 0 \le x \le 1\,, \\
u(0,t) &= 0 && t \ge 0\,, \\
u(1,t) &= 1 && t \ge 0\,.
\end{aligned}
$$

Schritt 1) Homogenisierung der Randwerte:

$$w(x,t) := u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}\,(g(t) - f(t))$$

$$w(x,t) =$$

$$w_t(x,t) = \qquad\qquad\qquad w_{tt}(x,t) =$$

$$w_x(x,t) = \qquad\qquad\qquad w_{xx}(x,t) =$$

Schritt 2) Neue Aufgabe: für $w(x,t) = u(x,t) - x$:

$u_{tt} - 4u_{xx} = 0 \Longrightarrow \qquad w_{tt}$

$u(x,0) = x - \sin(\pi x) \Longrightarrow \qquad w(x,0) =$

$u_t(x,0) = 3\sin(2\pi x) \Longrightarrow \qquad w_t(x,0) =$

$u(0,t) = 0 \Longrightarrow \qquad w(0,t) =$

$u(1,t) = 1 \Longrightarrow \qquad w(1,t) =$

Schritt 3) Lösung der homogenen Aufgabe für w:

Mit den obigen Bezeichnungen gilt

$c = 2, \quad L = 1, \quad w_0(x) = -\sin(\pi x), \quad \tilde{v}_0(x) = 3\sin(2\pi x).$

Allgemeine Lösungsformel:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(\frac{ck\pi}{L}\, t) \;+\; B_k \sin(\frac{ck\pi}{L}\, t) \right] \sin(\frac{k\pi}{L}\, x)$$

Hier also:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(2k\pi\, t) \;+\; B_k \sin(2k\pi\, t) \right] \sin(k\pi\, x)$$

Allgemeine Formel für Koeffizienten:

$A_k \;=\; 2 \int_0^1 w_0(\alpha) \sin(k\pi\alpha)\, d\alpha,$ liefert $A_1 = -1$ $\quad A_k = 0$ sonst

$B_k \;=\; \frac{2}{2k\pi} \int_0^1 \tilde{v}_0(\alpha) \sin(k\pi\alpha)\, d\alpha,$ liefert $B_2 = \frac{3}{4\pi}$ $\quad B_k = 0$ sonst.

Hier besser Anfangsbedingungen für Reihe aufschreiben:

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(2k\pi\, t) \;+\; B_k \sin(2k\pi\, t) \right] \sin(k\pi x)$$

$$w(x,0) = -\sin(\pi x) =$$

$$\Longrightarrow \; A_k =$$

$$w_t(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-2k\pi A_k \sin(2k\pi\, t) \;+\; 2k\pi B_k \cos(2k\pi\, t) \right] \sin(k\pi x)$$

$$w_t(x,0) = 3\sin(2\pi x)$$

$$\Longrightarrow \; B_k =$$

und damit

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \cos(2k\pi\, t) \,+\, B_k \sin(2k\pi\, t) \right] \sin(k\pi x) \\
&= A_1 \cos\left(2 \cdot 1 \cdot \pi\, t\right) \sin\left(1 \cdot \pi\, x\right) \,+\, B_2 \sin\left(2 \cdot 2 \cdot \pi\, t\right) \sin\left(2 \cdot \pi\, x\right)
\end{aligned}
$$

also

$$
w(x,t) \,=\, -\cos(2\pi t) \sin(\pi x) \,+\, \frac{3}{4\pi} \sin(4\pi t) \sin(2\pi x)
$$

Die Lösung der ursprüglichen RWA lautet also

$$
u(x,t) \,=\, x + w(x,t) \,=\, x - \cos(2\pi t) \sin(\pi x) \,+\, \frac{3}{4\pi} \sin(4\pi t) \sin(2\pi x)
$$

Zur Hausaufgabe 1/
Richtige Fortsetzung von Anfangsdaten bei anderen Randbedingungen

Wärmeleitungsgleichung mit Neumann Randbedingungen

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, & 0 < x < 1,\, t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), & 0 < x < 1, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0 & t > 0. \end{aligned}$$

Der Ansatz $u(x,t) = v(x) \cdot w(t)$ liefert:

$$v'' = -\lambda\, v, \quad \dot{w} = -\lambda w, \quad v'(0) = v'(1) = 0.$$

Fallunterscheidung $\lambda = 0, \lambda > 0, \lambda < 0$ unter der Voraussetzung, dass die Lösung nicht identisch verschwindet, liefert

$\lambda_k = k^2\pi^2$ und $v_k = \ldots$

Löse für diese λ_k die DGl $\dot{w} = -\lambda w$

Setze

$$u(x,t) = v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(x) w_k(t)\,.$$

Dann muss noch

$$u(x,0) = v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k v_k(x) w_k(0) \;=\; g(x)$$

erfüllt werden!