Hörsaalübung 5 Differentialgleichungen II

Harmonische Funktionen
Laplace Gleichung im zweidimensionalen Raum
07.06.2019

Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Definition: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, zusammenhängendes, offenes Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega$. Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\Omega \cup \partial\Omega)$ heißt **harmonisch** in Ω, wenn

$$\boxed{\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \forall\,(x,y) \in \Omega}$$

Beispiele: Für welche $k \in \mathbb{R}$ bzw. $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist u in $\mathbb{R}^2$ harmonisch?

a) $u(x,y) := (x + k \cdot y)^2 \qquad k \in \mathbb{R}$

$u_x = 2\,(x + k \cdot y), \qquad u_y = 2k\,(x + k \cdot y)$

$u_{xx} = 2, \qquad u_{yy} = 2k^2, \qquad \Delta u = 2 + 2k^2$

b) $u(x,y) := \cos(2x) \cdot g(y)$

$u_x = -2\sin(2x) \cdot g(y), \qquad u_y = \cos(2x) \cdot g'(y)$

$u_{xx} = -4\cos(2x) \cdot g(y), \qquad u_{yy} = \cos(2x) \cdot g''(y)$

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = \cos(2x)\,(g''(y) - 4g(y)) \stackrel{!}{=} 0$$
$$P(\mu) =$$

Eigenschaften harmonischer Funktionen

Mittelwerteigenschaft:

Sei u harmonisch im Kreis $B_a(x_0, y_0)$ mit Radius a um (x_0, y_0) und stetig auf dem Rand des Kreises $\partial B_a(x_0, y_0)$ fortsetzbar. Dann gilt

$$\boxed{u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_{\partial B_a(x_0,y_0)} u(x,y)\,ds}$$

Maximumprinzip:

Eine in Ω (wie oben) harmonische Funktion nimmt ihr Maximum und Minimum auf dem Rand von Ω an.

Beispiel 1: Es sei $\Delta v = 0$ für $x^2 + y^2 < 4$ und

$$v(x, y) = (x + y)^2 \qquad \text{für} \quad x^2 + y^2 = 4.$$

Gesucht: $v(0, 0)$

Mittelwertsatz:

$$v(0,0) = \frac{1}{2\pi a} \oint_{\partial B_a(0,0)} v(x, y) ds$$

Parametrisierung von Kreisrand:

$$v(0,0) = \tfrac{1}{2\pi \cdot 2} \int_0^{2\pi} v(c(t)) \cdot \|\dot{c}(t)\| \, dt$$

Beispiel 2: Sei $D := [-2,2] \times [-2,2]$ und u eine Lösung von

$\Delta u \; = \; -4$ im Inneren von D

$u(x,y) \; = \; 0$ auf dem Rand von D

Gesucht: obere und untere Schranke für $u(0,0)$.

$u(0,0) =$ Mittelwert der Randdaten?

Behauptung: $v(x,y) = \; u(x,y) + \; (x+y)^2$ ist harmonisch.

Beweis: $\Delta v = \; v_{xx} + v_{yy} = \; u_{xx} + \left[(x+y)^2\right]_{xx} + u_{yy} \; \left[(x+y)^2\right]_{yy} =$

Folgerung: v nimmt min/max auf dem Rand von D an

$$\max_{(x,y)\in\partial D} v(x,y) = \max_{(x,y)\in\partial D} u(x,y) + \max_{(x,y)\in\partial D} (x+y)^2$$

$$\min_{(x,y)\in\partial D} v(x,y) = \min_{(x,y)\in\partial D} u(x,y) + \min_{(x,y)\in\partial D} (x+y)^2$$

$$\Longrightarrow \qquad \max_{(x,y)\in D} v(x,y) = \qquad\qquad \min_{(x,y)\in D} v(x,y) =$$

$$u(x,y) = v(x,y) - (x+y)^2 \Longrightarrow$$

$$u(0,0)\ v(0,0) - (0+0)^2$$

Bemerkungen:

- In Beispiel 2 hätten wir auch $v(0,0)$ mittels Mittelwertsatz berechnen können.

- v aus beiden Beispielen können wir auch exakt berechnen.

Laplacegleichung auf Rechtecken mit Dirichlet Randbed.

$$\Delta u = 0 \qquad u \in\ (0,L)\times(0,b)\,, \qquad u =\ g \text{ auf Rand von} [0,L]\times[0,b]\,.$$

Zunächst: sei g auf drei Seiten des Rechtecks $= 0$.
Zum Beispiel:

$$\Delta u =\ 0 \qquad u \in\ (0,L)\times(0,b)\,,$$
$$u(0,y) =\ u(L,y) =\ u(x,b) =\ 0, \qquad u(x,0) = g(x)\,.$$

Produktansatz: $u(x,y) =\ v(x)\cdot w(y)$ liefert

$$\Delta u =\ u_{xx}\ +\ u_{yy}$$

$$=\ v''(x)w(y) + v(x)w''(y)\ =\ 0$$

$$\Longrightarrow\ -\frac{v''(x)}{v(x)}\ =\ \frac{w''(y)}{w(y)}\ =$$

Die Randbedingungen liefern für nichttriviale Lösungen

$$u(0,y) = v(0)w(y) = 0 \Longrightarrow v(0) = 0, \quad u(L,y) = v(L)w(y) = 0 \Longrightarrow v(L) = 0$$

RWA: $\dfrac{v''(x)}{v(x)} = -\lambda,\ v(0) = v(L) = 0$

Die Differentialgleichung $v''(x) + \lambda v(x) = 0$

liefert für $\lambda = 0 : v(x) = c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x}$
für $\lambda < 0 : v(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$
für $\lambda > 0 : v(x) = c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + c_2 \left(\cos\sqrt{\lambda}x\right)$

Wegen $v(0) = v(L) = 0$ nichttriviale Lösungen nur für $\lambda > 0$
(vgl. Aufg.2 Blatt 1H)

Aus $v(0) = c_1 \sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot 0\right) + c_2\left(\cos\sqrt{\lambda}\cdot 0\right) \stackrel{!}{=} 0$ folgt $c_2 = 0$.

Aus $v(L) = c_1 \sin(\sqrt{\lambda}L) \stackrel{!}{=} 0 \stackrel{c_1 \neq 0}{\Longrightarrow} \sqrt{\lambda}L = k\pi$. Also $\boxed{\lambda_k = \left(\dfrac{k\pi}{L}\right)^2}$

Zugehörige Lösungen: $\boxed{v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}$

Mit diesen $\lambda-$Werten lösen wir die zweite DGL

$$w''(y) = \lambda_k w(y) = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 w(y)$$

$$w'' - \lambda_k w = 0 \longrightarrow \mu^2 - \lambda_k = 0 \iff \mu = \pm\sqrt{\lambda_k}$$

$$w(y) = c_1 e^{\sqrt{\lambda_k}y} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda_k}y}$$

$$\boxed{w_k = A_k e^{-\frac{k\pi}{L}y} + B_k e^{\frac{k\pi}{L}y}}$$

Alternativ: $w_k = a_k \sinh\left(\frac{k\pi}{L}y\right) + b_k \cosh\left(\frac{k\pi}{L}y\right)$ Hier wird der Ansatz mit der exp-Fkt weiter bearbeitet.

Jede Funktion $u_k(x,y) = v_k(x) \cdot w_k(y)$ löst die Differentialgleichung und erfüllt die Randbedingungen $u_k(0,y) = u_k(L,y) = 0$

Also tut dies auch jede lineare Kombination

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \left[A_k e^{-\frac{k\pi}{L} y} + B_k e^{\frac{k\pi}{L} y} \right] \sin(\frac{k\pi}{L} x)$$

Übergang zur Reihe (ohne Diskussion der Konvergenz) ergibt als Lösungsdarstellung

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k e^{-\frac{k\pi}{L} y} + B_k e^{\frac{k\pi}{L} y} \right] \sin(\frac{k\pi}{L} x)$$

Die dritte Null-Randbedingung lautet:

$$u(x, b) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k e^{-\frac{k\pi}{L} b} + B_k e^{\frac{k\pi}{L} b} \right) \sin(\frac{k\pi}{L} x) = 0$$

$$\Longrightarrow\ A_k = -e^{2\frac{k\pi}{L}b} B_k \ \Longrightarrow\ w_k(y) = \ B_k \left[-e^{2\frac{k\pi}{L}b} e^{-\frac{k\pi}{L}y} \ + \ e^{\frac{k\pi}{L}y}) \right]$$

$$u(x,y) \ = \sum_{k=1}^{n} B_k \left[-e^{2\frac{k\pi}{L}b} e^{-\frac{k\pi}{L}y} \ + \ e^{\frac{k\pi}{L}y}) \right] \sin(\frac{k\pi}{L}x)$$

oder damit es übersichtlicher wird, mit $c_k = B_k e^{\frac{k\pi}{L}b}$ und mit $n \to \infty$

$$\boxed{u(x,y) \ = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{\frac{k\pi}{L}(y-b)} \ - \ e^{-\frac{k\pi}{L}(y-b)}) \right] \sin(\frac{k\pi}{L}x)}$$

Zu erfüllen ist noch $u(x,0) = \ g(x)$ also

$$u(x,0) \ = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{-\frac{k\pi}{L}b} \ - \ e^{\frac{k\pi}{L}b} \right] \sin(\frac{k\pi}{L}x) \ = \ g(x) \qquad x \in [0,L]$$

Bestimme dazu Four.koeff'n der ungeraden, $2L$-period. Fortsetzung von g.

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(k\omega x)$$

$$\beta_k = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin(k\omega x)\, dx \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$$

Dann gilt mit

$$c_k = \frac{\beta_k}{e^{-\frac{k\pi}{L}b} - e^{\frac{k\pi}{L}b}}$$

und damit $\boxed{u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left[e^{\frac{k\pi}{L}(y-b)} - e^{-\frac{k\pi}{L}(y-b)}) \right] \sin(\frac{k\pi}{L}x)}$

oder mit $b_k = c_k/2$ $\boxed{u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sinh\left(\frac{k\pi}{L}(y-b)\right) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right)}$

Sind die Nullranddaten anders verteilt, so muss der Ansatz angepasst werden.

Beispiel:

$$\Delta u = 0 \qquad \text{auf } R := (0,\pi)\times(0,1)$$

$$u(x,0) = 0\,, \quad u(x,1) = -\pi\sin(x) \qquad x\in[0,\pi]$$

$$u(0,y) = 0\,, \quad u(\pi,y) = 0 \qquad y\in[0,1]$$

Ansatz war: $u(x,y) = v(x)\cdot w(y)$

u für zwei verschiedene $x-$Werte = Null : fange mit der DGL für v an.

$$u(0,y) = v(0)w(y) = 0 \Longrightarrow v(0) = 0, \quad u(\pi,y) = v(\pi)w(y) = 0 \Longrightarrow v(\pi) = 0$$

Gleiche Aufgabe wie oben mit $L=\pi$. Nichttriviale Lösungen

$$v_k(x) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \sin(kx), \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Nun muss gelten: $-\dfrac{v''(x)}{v(x)} = \dfrac{w''(y)}{w(y)} = k^2$

Wie auf Seite 9 folgt:

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k e^{-\frac{k\pi}{L} y} + B_k e^{\frac{k\pi}{L} y} \right] \sin(\frac{k\pi}{L} x)$$

wobei hier $L = \pi$ gilt.

Die dritte Randbedingung: $u(x,0) = 0$ lautet

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k e^{-0} + B_k e^{0} \right] \sin(\frac{k\pi}{L} x) = 0$$

$$u(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{-ky} - e^{ky}) \sin(kx)$$

Zu erfüllen ist noch $u(x,1) = g(x)$

$$u(x,1) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k (e^{-k} - e^{k}) \sin(kx) = g(x)$$

Bestimme Fourierkoeffizinten der ungeraden, $2L = 2\pi$ periodischen Fortsetzung der rechten Seite $g(x)$ bei Entwicklung in $\sin(\frac{k\pi}{L}x)$:

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx)\,, \qquad \beta_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\, \sin(kx)\, dx$$

Koeffizientenvergleich: $\qquad A_k = \dfrac{\beta_k}{e^{-k} - e^k}.$

Hier : $g(x) = -\pi \sin(x)$. Also

$\beta_k = \frac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} -\pi \sin(x)\, \sin(kx)\, dx$

Man hätte in dieseem Beispiel die Koeffizienten aber auch ohne Rechnung ablesen können:

Es muss gelten

$$u(x,1) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k(e^{-k} \;-\; e^{k})\,\sin(kx) \;\stackrel{!}{=}\; -\pi\sin(x)$$

ohne Rechnung erhält man mittels Koeffizientenvergleich:

$$A_1[e^{-1} - e^{1}] = -\pi\,, \qquad A_k = 0 \;\text{ für }\; k \neq 1$$

$$u(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} A_k(e^{-ky} \;-\; e^{ky})\,\sin(kx)$$

$$u(x,y) = \frac{\pi(e^{-y} \;-\; e^{y})}{e^{1} - e^{-1}}\,\sin(x)$$

Was tun wenn die Randdaten nicht auf drei Seiten verschwinden?

Idee: Problem in maximal 4 Teilprobleme zerlegen, bei denen jeweils auf drei Kanten Null vorgegeben ist und auf der vierten die ursprünglichen Randdaten. Teilprobleme lösen $\longrightarrow u_1,\, u_2,\, u_3,\, u_4,$ und addieren.

$$\Delta \left(\sum_{k=1}^{4} u_k \right) = \sum_{k=1}^{4} \Delta u_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{4} u_k \text{ (Kante 1)} = u_1(\text{ Kante 1 }) + 0 + 0 + 0$$

analog auf den anderen drei Seiten.

Ist also alles gut?

Ausweg: Wir ziehen zunächst eine bilineare **Eckenfunktion**

$$u_E(x, y) = a + bx + cy + dxy, \qquad u = u_E \text{ in den Ecken}$$

von u ab. $v := u - u_E$ löst die DGL mit angepassten Daten, die in den Ecken verschwinden.

Laplacegleichung auf Ringen, Kreissegmenten, Innerhalb oder außerhalb von Kreisscheiben etc.

Laplace Operator in Polarkoordinaten:

$$\boxed{r^2 \cdot \Delta u \;=\; 0 \iff r^2 u_{rr} \;+\; r u_r + \; u_{\phi\phi} \;=\; 0\,.}$$

Im **rotationssymmetrischem** Fall: $u(r, \phi) = v(r)$ gilt $u_{\phi\phi} \;=\; 0\,.$

Zu lösen: $\qquad r^2 u_{rr} \;+\; r u_r \;=\; 0$

Setze $w := v'$. Dann ist zu lösen: $r w' + w = 0$

$$\frac{dw}{dr} = -\frac{w}{r} \iff \frac{dw}{w} = -\frac{dr}{r}$$

$$\ln(|w|) = -\ln(r) + k \iff e^{\ln(|w|)} \;=\; e^{-\ln(r)+k} \;=\; e^{-\ln(r)} \cdot e^k$$

$$v' = w = \alpha \cdot \tfrac{1}{r} \Longrightarrow v(r) = \alpha \cdot \ln(r) + \beta$$

Im nicht rotationssymmetrischem Fall:

Ansatz: $u(r,\phi) = w(r) \cdot v(\phi)$

Zu erfüllen: $r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0\,.$

Neue Dgl.: $r^2 w'' \cdot v + r w' \cdot v + w \cdot v'' = 0$

Sortieren nach v und w: $v(r^2 w'' + r w') = -w \cdot v''$

$$\Longrightarrow \frac{r^2 w'' + r w'}{w} = -\frac{v''}{v} = \lambda.$$

System gewöhnlicher Dgl'n:

$$\boxed{v''(\phi) = -\lambda v(\phi)\,, \qquad r^2 w''(r) + r w'(r) - \lambda w = 0}$$

Zunächst $v''(\phi) = -\lambda v(\phi)$: Lösungen sind (siehe oben bzw. Blatt 1H)

$\lambda = 0$: lineare Funktion

$\lambda < 0$: reelle exp-Funktionen

$\lambda > 0$: Cosinus- und Sinus-Funktionen

v sollte $2\pi-$periodisch sein, daher kommen nur in Frage $\cos(k\phi)$, $\sin(k\phi)$

mit zugehörigen $\lambda_k = k^2$ und

$$\boxed{v_k(\phi) = a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi)\,, \quad k \in \mathbb{N}, \quad v_0(\phi) = a_0}$$

Gleichung für die passenden w_k lautet

$$r^2 w''(r) + r w'(r) - \lambda_k w = r^2 w''(r) + r w'(r) - k^2 w = 0$$

$\underline{k = 0:}$ $\quad r^2 w''(r) + r w'(r) = 0, \qquad g = w'$

$$rg'(r) + g(r) = 0 \iff r \cdot \frac{dg}{dr} = -g \iff \frac{dg}{g} = -\frac{dr}{r}$$

$$w' = g = \frac{d_0}{r} \implies \boxed{\; w_0 = c_0 + d_0 \ln(r)\,. }$$

$\underline{k \neq 0:}$ Eulersche Dgl.: Substitution $r = e^t$ oder Ansatz $w(r) = r^\gamma$

$$r^2 w''(r) + r w'(r) - k^2 w = 0 \iff$$

$$-k^2 \cdot r^\gamma + r \cdot \gamma \cdot r^{\gamma-1} + r^2 \cdot \gamma \cdot (\gamma - 1) \cdot r^{\gamma-2} = 0$$

$$\iff r^\gamma \left(-k^2 + \gamma + \gamma^2 - \gamma\right) = 0 \iff \gamma = \pm k$$

und damit $\boxed{\; w_k(r) = c_k r^{-k} + d_k r^k \;}$

Jede Funktion $w_k \cdot v_k$ löst die DGL.

Da die Dgl linear ist, ist Jede Linear Kombination auch eine Lösung

$$u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{n} (c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))$$

Ohne Diskussion der Konvergenz, schreiben wir

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))}$$

Je nach Gebiet müssen nicht beschränkte Summanden ausgeschlossen werden. Siehe unten.

Beispiel:
$\Delta u = 0$, für $x^2 + y^2 > 16$, $\qquad u(x,y) = 1 + xy - 2y^2$, auf $x^2 + y^2 = 16$.

Allgemeine Lösung:

$$u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))$$

Vorgehensweise auf dem Außenraum $x^2 + y^2 > R^2$:

Da die Lösungen beschränkt bleiben sollen : $d_k = 0\,, \quad \forall k$.

Es bleibt:

Ansatz : $u(r,\phi) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k} (a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))$

Zu erfüllen ist noch die Randbedingung $u(R,\phi) = u_0(\phi)$, also

$$u(R,\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} R^{-k} \left(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi)\right) = u_0(\phi)$$

Entwickle u_0 in eine Fourier-Reihe

$$u_0(\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi)$$

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \cos(k\phi)\, d\phi$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(\phi) \sin(k\phi)\, d\phi$$

Koeffizientenvergleich:

$$R^{-k} a_k = A_k \iff a_k = R^k \cdot A_k, \quad \text{und analog } b_k = R^k \cdot B_k$$

und wir erhalten die Lösung

$$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k \left(A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi)\right)$$

Zurück zum Beispiel:

zu erfüllen ist die RB: $u(x,y) = 1 + xy - 2y^2,$ auf $x^2 + y^2 = 16$

Mit $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $r^2 = x^2 + y^2$ also

$$u(4,\phi) = 1 + 4\cos(\phi)\cdot 4\sin(\phi) - 32\sin^2(\phi)$$

Nutze $\sin(2\phi) = 2\cos(\phi)\cdot\sin(\phi)$, $\qquad \cos(2\phi) = 1 - 2\sin^2(\phi)$

Zu erfüllen mit $u(r,\phi) = \dfrac{A_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{r}\right)^k \left(A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi)\right)$

$$u(4,\phi) = u_0(\phi) = 1 + 8\sin(2\phi) - 16 + 16\cos(2\phi)$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{4}\right)^k (A_k \cos(k\phi) \,+\, B_k \sin(k\phi))$$

Die Fourierkoeffizienten von u_0 sind

$\frac{A_0}{2} = -15\,, \quad A_2 = 16\,, \quad B_2 = 8, \qquad A_K = B_k = 0$ sonst.

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(r,\phi) = \,-15 \,+\, \left(\frac{4}{r}\right)^2 (16\cos(2\phi) \,+\, 8\sin(2\phi)\,)$$

Falls Lösung in kartesischen Koordinaten gewünscht:

nutze $\cos(2\phi) = \cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) = \dfrac{x^2}{r^2} - \dfrac{y^2}{r^2} = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$,

und $\sin(2\phi) = \,2\cos(\phi)\cdot\sin(\phi) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}\,.$

Zusammenfassung

Allgemeiner Ansatz bei Außen–/Innenraum eines Kreises, bei Ringen, bei Kreis-/ Ringsegmenten

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))}$$

Um beschränkte Lösungen zu erhalten setzt man

- im **Innenraum** mit RWE $u(R,\phi) = u_0(\phi)$

  $c_k = 0, \forall k \in \mathbb{N}$ und $d_0 = 0$ und erhält:

$$u(r,\phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k (A_k \cos(k\phi) + B_k \sin(k\phi))$$

- im **Außenraum** mit Randwerten $u(R, \phi) = u_0(\phi)$

  $d_k = 0$ und:

$$u(r, \phi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^k \left(A_k \cos(k\phi) \;+\; B_k \sin(k\phi)\right)$$

- im **Ring** mit RWE $u(R_1, \phi) = u_1(\phi), \quad u(R_2, \phi) = u_2(\phi)$

  volle Ansatzfunktion.

  Koeffizienten über die zwei Randbedingungen bestimmen!

- im **(Ring-)Sektor**: Wenn auf mehr als einem Randstück Randdaten $\neq 0$ zerlegt man notfalls, wie beim Rechteck. Ansatzfunktionen müssen evtl. angepasst werden.