Hörsaalübung 4 Differentialgleichungen II

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung:
Typen, Transformation auf Normalformen
Anfangswertaufgabe für die Wellengleichung

Lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\boxed{a(x,t)u_{xx} + 2b(x,t)u_{xt} + c(x,t)u_{tt} \;=\; h(x,t,u,u_x,u_t)}$$

Typen:

$D = \; ac - b^2 < 0$: hyperbolisch,
$D = \; ac - b^2 = 0$: parabolisch,
$D = \; ac - b^2 > 0$: elliptisch.

Der Typ kann von x und t abhängen!

Unterschiedliche Verfahren sind geeignet, unterschiedliche Vorgabe von Anfangs- bzw. Randdaten für vernünftige * Aufgabenstellung erforderlich.

*) Vernünftig heißt sachgemäß/korrekt gestellt: Es gibt eindeutige, stetig von den vorgegebenen Daten abhängige Lösung.

Beispiele:
Bestimmen Sie die Typen folgender Differentialgleichungen:

a) $u_{xx} + 6\,u_{xy} + 9\,u_{yy} + \,y\,u_x - x\,u_y \;=\; 0$

b) $u_{xx} - 4\,u_{xt} + \,u_{tt} + \,4\,u_x - x^2\,u_t \,+\, u = \,0$

c) $u_{xx} + xy\,u_{xy} + y\,u_x - x\,u_y \;=\; 0$

d) $(2x^2 - 1)\,u_{xx} - 4xy\,u_{xy} + (2y^2 - 1)\,u_{yy} + x\,u_x \;=\; \cos(x)$

Normalformen:

hyperbolisch: $u_{xx} - u_{tt} = G(x, t, u, u_x, u_t)$

parabolisch: $u_{xx} = G(x, t, u, u_x, u_t)$

elliptisch: $u_{xx} + u_{tt} = G(x, t, u, u_x, u_t)$

Ziel: Herstellung der Normalform durch Einführung neuer Variablen
$\eta = \eta(x, t)$, $\tau = \tau(x, t)$,
sowie der neuen Funktion:
$\tilde{u}(\eta(x, t), \tau(x, t)) = u(x, t)$ ein.

Regularitätsbedingung: $\eta_x \tau_t - \eta_t \tau_x \neq 0.$

Differentialausdrücke werden mittels Kettenregel umgerechnet:

$$
\begin{aligned}
u_x &= \\
\\
u_t &= \tilde{u}_\eta \cdot \eta_t + \tilde{u}_\tau \cdot \tau_t \,, \\
u_{xx} &= \\
&= \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot (\eta_x)^2 + 2\tilde{u}_{\eta\tau} \cdot \eta_x \tau_x + \tilde{u}_{\tau\tau} \cdot (\tau_x)^2 \; + \; (\tilde{u}_\eta \eta_{xx} + \tilde{u}_\tau \tau_{xx}) \,, \\
u_{xt} &= \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot \eta_x \eta_t + \tilde{u}_{\eta\tau} \cdot (\tau_t \eta_x + \tau_x \eta_t) + \tilde{u}_{\tau\tau} \cdot \tau_t \tau_x \; + (\tilde{u}_\eta \eta_{xt} + \tilde{u}_\tau \tau_{xt}) \,, \\
u_{tt} &= \tilde{u}_{\eta\eta} \cdot (\eta_t)^2 + 2\tilde{u}_{\eta\tau} \cdot \eta_t \tau_t + \tilde{u}_{\tau\tau} \cdot (\tau_t)^2 + (\tilde{u}_\eta \eta_{tt} + \tilde{u}_\tau \tau_{tt}) \,.
\end{aligned}
$$

Einsetzen liefert neue DGL

$$
A\tilde{u}_{\eta\eta} + 2B\tilde{u}_{\eta\tau} + C\tilde{u}_{\tau\tau} \; = \; \tilde{h}(\eta, \tau, \tilde{u}, \tilde{u}_\eta, \tilde{u}_\tau)
$$

Frage: Wie sollte man η, τ wählen?

Lineare PDE zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten der Ableitungen zweiter Ordnung

$$\boxed{a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xt} + a_{22}u_{tt} + b_1(x,t)u_x + b_2(x,t)u_t + f(x,t)u = g(x,t)}$$

oder in Matrixschreibwese:

$$(\nabla^T A \nabla)u + (b^T \nabla)u + cu = h, \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

A ist reell und symmetrisch: Bestimme EWe λ_1, λ_2 und zugehörige, orthonormierte Eigenvektoren $\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]}$.

Setze $\boldsymbol{S} = (\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]})$, $\qquad \begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$

Dann gilt wieder nach Kettenregel :$\nabla_{xt} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\eta\tau} = \boldsymbol{S} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \end{pmatrix}$

$$(\nabla_{xt}^T A \nabla_{xt}) u = \ (\ \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\eta\tau} \ )^T \cdot A \cdot \boldsymbol{S} \cdot \nabla_{\eta\tau} \, \tilde{u}$$

$$S^T A S = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{v}^{[1]})^T \\ (\boldsymbol{v}^{[2]})^T \end{pmatrix} \ A \, (\boldsymbol{v}^{[1]}, \boldsymbol{v}^{[2]}) =$$

Der Koordinatenwechsel führt zur **Diagonalform**:

$$\lambda_1 \tilde{u}_{\eta\eta} + \lambda_2 \tilde{u}_{\tau\tau} + p_1 \tilde{u}_\eta + p_2 \tilde{u}_\tau + d\tilde{u} = H$$

Hyperbolisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \, < \, 0$,

Elliptisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \, > \, 0$,

Parabolisch: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \, = \, 0$.

Im hyperbolischen und elliptischen Fall führt die Skalierung :

$\hat{x} = \eta/\sqrt{\lambda_1}$, $\hat{t} = \tau/\sqrt{\lambda_2}$ auf die **Normalformen**

$$\hat{u}_{\hat{x}\hat{x}} \pm \hat{u}_{\hat{t}\hat{t}} + p_1 \hat{u}_{\hat{x}} + p_2 \hat{u}_{\hat{t}} + d\hat{u} = H$$

Im parabolischen Fall ist ein Eigenwert, z.B. λ_2, gleich Null. Eine der zweiten Ableitungen z.B. $\tilde{u}_{\tau\tau}$ fehlt. Man teilt die Diagonalform durch λ_1.

Beispiele:

Hyperbolisch: Wellengleichung $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$,

Elliptisch: Potential-/Laplacegleichung $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$,

Parabolisch: Wärmeleitungsgleichung $u_t - c u_{xx} = 0$.

Beispiel 1: Bestimmen Sie den Typ und Transformieren Sie auf Normalform

$u_{xx} - \frac{2}{3}u_{xt} + u_{tt} + 3u_x = \cos(x)$

Typ: $ac - b^2 =$

$A =$

$\Longrightarrow p(\lambda) =$

$\Longrightarrow \lambda_1 =$, $\lambda_2 =$ (elliptisch)

Eigenvektoren:

$(A - \lambda_1 I)\boldsymbol{v}^{[1]} =$

$$(A - \lambda_2 I)\boldsymbol{v}^{[2]} =$$

$$\boldsymbol{S} =$$

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \tau \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}^T \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} x + t \\ x - t \end{pmatrix}$$

$\eta =$ $\qquad\qquad$ $\tau =$

Alte DGL: $u_{xx} - 2\frac{1}{3}u_{xt} + u_{tt} + 3u_x = \cos(x)$

Wir müssen noch u_x und $\cos(x)$ ersetzen

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+t), \qquad \tau = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-t)$$

$$x = \qquad \Longrightarrow \cos(x) =$$

$$u_x = (u(x,t))_x = (\tilde{u}(\eta(x,t),\tau(x,t))_x = \tilde{u}_\eta \cdot \eta_x + \tilde{u}_\tau \cdot \tau_x$$

$$\eta_x = \qquad \tau_x =$$

$$u_x =$$

Alte DGL: $u_{xx} - 2\frac{1}{3}u_{xt} + u_{tt} + 3u_x = \cos(x)$

Neue DGL hat **Diagonalform**:

$$\frac{2}{3}\tilde{u}_{\eta\eta} + \frac{4}{3}\tilde{u}_{\tau\tau} + \frac{3}{\sqrt{2}}\tilde{u}_\eta + \frac{3}{\sqrt{2}}\tilde{u}_\tau = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\eta+\tau)\right).$$

****

(Erneute Transformation: $\tilde{x} = \eta/\sqrt{\lambda_1}$, $\tilde{t} = \tau/\sqrt{\lambda_2}$

liefert die **Normalform:**

$$\tilde{v}_{\tilde{x}\tilde{x}} \pm v_{\tilde{t}\tilde{t}} + \frac{3\sqrt{3}}{2}v_{\tilde{x}} + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}v_{\tilde{t}} = \cos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\tilde{x} + \frac{2}{\sqrt{3}}\tilde{t})\right).$$

Wellengleichung

Homogene Anfangwertaufgabe (AWA) auf $\mathbb{R}$ (Cauchy-Problem)

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad c > 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x) = f(x), \quad u_t(x,0) = v_0(x) = g(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Formel von d'Alembert

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2}\,[\,f(x+ct) + f(x-ct)\,] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\psi)\,d\psi\,.}$$

Herleitungsmethode: Mit der Substitution $\alpha = x + ct$, $\mu = x - ct$, und
$$w(\alpha(x,t), \mu(x,t)) = u(x,t)$$

liefert die Kettenregel $u_{tt} - c^2 u_{xx} \iff w_{\alpha\mu} = 0$ (Integrable Form)

und damit

$$w_\alpha = \phi(\alpha) \implies w(\alpha,\mu) = \Phi(\alpha) + \Psi(\mu) \implies u(x,t) = \Phi(x+ct) + \Psi(x-ct)$$

Anfangsbedingungen:

$$u(x,0) = \Phi(x) + \Psi(x) = f(x), \qquad u_t(x,0) = c\Phi'(x) - c\Psi'(x) = g(x)$$

Ableiten der ersten Gleichung liefert

$$c\Phi'(x) + c\Psi'(x) = cf'(x), \qquad u_t(x,0) = c\Phi'(x) - c\Psi'(x) = g(x)$$

Dies sind 2 Gleichungen für Φ' und Ψ'. Auflösen ergibt

$$\Phi'(x) = \frac{1}{2}f'(x) + \frac{1}{2c}g(x)\,, \qquad \Psi'(x) = \frac{1}{2}f'(x) - \frac{1}{2c}g(x)$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}f(x) + B + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\sigma)d\sigma\,, \qquad \Psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + D - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(\sigma)d\sigma$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(\sigma)d\sigma \ + \frac{1}{2}f(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} g(\sigma)d\sigma \ + K$$

$$= \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\sigma)d\sigma \,.$$

Inhomogene Wellengleichung (AWA) auf $\mathbb{R}$ (Cauchy-Problem)

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} &= h(x,t) \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \quad c > 0, \\ \tilde{u}(x,0) = \tilde{u}_t(x,0) &= 0 \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Lösung:

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathsf{d}\omega\mathsf{d}\tau \qquad (1)$$

Beweis

$$\boxed{\frac{d}{dy}\int_{a(y)}^{b(y)} f(y,z)dz = \int_{a(y)}^{b(y)} \frac{d}{dy} f(y,z)dz + b'(y)f(y,b(y)) - a'(y)f(y,a(y))}$$

$$\tilde{u}_x(x,t) \;=\; \frac{1}{2c}\int_0^t \left[h(x-c(\tau-t),\tau) - h(x+c(\tau-t),\tau\right]\,\mathsf{d}\tau$$

$$\tilde{u}_{xx}(x,t) \;=\; \frac{1}{2c}\int_0^t \left[h_\omega(x-c(\tau-t),\tau) - h_\omega(x+c(\tau-t),\tau\right]\,\mathsf{d}\tau$$

$$\begin{aligned}\tilde{u}_t(x,t) \;&=\; \frac{1}{2c}\int_{x+c(t-t)}^{x-c(t-t)} h(\omega,t)\,\mathsf{d}\omega \\ &+\; \frac{1}{2c}\int_0^t \left[h(x-c(\tau-t),\tau)\cdot c - h(x+c(\tau-t),\tau)\cdot(-c)\right]\,\mathsf{d}\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t \left[h(x-c(\tau-t),\tau) + h(x+c(\tau-t),\tau)\right]\,\mathsf{d}\tau\end{aligned}$$

$$\tilde{u}_{tt}(x,t) = \frac{1}{2}\Big\{h(x,t) + h(x,t) + \int_0^t [h_\omega(x - c(\tau - t), \tau) \cdot c + h_\omega(x + c(\tau - t),$$

$$= h(x,t) + \frac{c}{2}\int_0^t [h_\omega(x - c(\tau - t), \tau) - h_\omega(x + c(\tau - t), \tau)] \, \mathsf{d}\tau$$

Offensichtlich gilt $\tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} = h(x,t)$. Für die Anfangswerte erhält man

$$\tilde{u}(x,0) = \frac{1}{2c}\int_0^0 \cdots = 0,$$

und

$$\tilde{u}_t(x,0) = \frac{1}{2}\int_0^0 \cdots = 0.$$

Beispiel:

$$\begin{aligned} u_{tt} - 9u_{xx} &= -4x \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) &= 1 \qquad u_t(x,0) = \cos(x) \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Methode: Löse zwei Aufgaben und setze zusammen. Genauer:

- Inhomogene DGL mit homogenen Anfangsdaten:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{tt} - 9\tilde{u}_{xx} &= -4x \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0\,, \\ \tilde{u}(x,0) &= 0 \qquad \tilde{u}_t(x,0) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Homogene DGL mit den gegebenen Anfangsdaten:

$$\begin{aligned} \hat{u}_{tt} - 9\hat{u}_{xx} &= 0 \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0\,, \\ \hat{u}(x,0) &= 1 \qquad \hat{u}_t(x,0) = \cos(x) \qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

- Lösung der ursprünglichen Aufgabe: $u = \hat{u} + \tilde{u}$.

Lösung:

- $\tilde{u}_{tt} - 9\tilde{u}_{xx} = -4x$

  $$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x+c(\tau-t)}^{x-c(\tau-t)} h(\omega,\tau)\,\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$$

  mit $h(x,t) = -4x$ also $h(\omega,\tau) =$

  und $c =$

  Also

  $\tilde{u}(x,t) =$

- $\hat{u}_{tt} - 9\hat{u}_{xx} = 0, \qquad \hat{u}(x,0) = 1, \qquad \hat{u}_t(x,0) = \cos(x)\,.$

  $$\hat{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[\, f(x+ct) + f(x-ct)\,\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\psi)\, d\psi$$

  $f(x) = u_0(x) = \qquad\qquad g(x) = v_0(x) =$

  $\hat{u}(x,t) =$

- Behauptung: $u = \tilde{u} + \hat{u}$ löst die ursprüngliche Aufgabe:

$$u_{tt} - 9u_{xx} = -4x \qquad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0\,,$$

$$u(x,0) = 1 \qquad u_t(x,0) = \cos(x) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Nachweis: $u(x,t) = -2xt^2 + 1 + \frac{1}{6}\left[\sin(x+3t) - sin(x-3t)\right]$

$u(x,0) =$

$u_t(x,t) =$

$u_t(x,0) =$

$u_{xx} =$

$u_{tt} =$

$u_{tt} - 9u_{xx} =$

$$u_{tt} = 4u_{xx}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R},\ t > 0\,,$$

Beispiel zu H2b: $u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1 + \cos(x) & -\pi \le x \le \pi\,, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

$$u_t(x,0) = 0.$$

$u(x,t) =$

$f(x+2t) =$

$f(x-2t) = \begin{cases} 1 + \cos(x-2t) & -\pi \le x - 2t \le \pi \iff x \in [-\pi + 2t, \pi + 2t] \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$

Zum Beispiel für $t = 1$:

für $t = \ 0, 1, 2, 4,$