

Hörsaalübung zu Blatt 3 Differentialgleichungen II

Erhaltungsgleichungen; Stoß- und Verdünnungswellen, Burgers Gleichung

Die ins Netz gestellten Dateien sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig (z. Bsp. fehlen oft wesentliche Voraussetzungen). Tipp- oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt NICHT!

Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Zur Erinnerung: In der ersten HÜ hatten wir mit

$u(x, t)$ = Dichte im Punkt x zum Zeitpunkt t ,

$v(x, t)$ = Geschwindigkeit im Punkt x zum Zeitpunkt t ,

$q(x, t) = u(x, t) \cdot v(x, t)$ = Fluss in (x, t)

Die Massebilanz

$$\int_a^{a+\Delta a} u(x, t) dx = M_0 + \int_{t_0}^t (q(a, \tau) - q(a + \Delta a, \tau)) d\tau .$$

Erst nach Umformungen und unter **Voraussetzung der Differenzierbarkeit** wurde daraus:

$$u_t(x, t) = \widetilde{v} q_x(x, t)$$

Erhaltungsgleichungen in einer Raumdimension

Cauchy-Problem:

$$\begin{aligned}u_t + f(u)_x &= 0, & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\u(x, 0) &= u_0(x) & \text{auf } \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$f = f(u)$ = Flussfunktion.

Andere Darstellung der DGL mit $a(u) := f'(u)$:

$$u_t + a(u) \cdot u_x = 0$$

Also Form von letzter HÜ. Dort: keine Probleme mit eindeutigen Lösungen.

Das muss nicht so sein!

Burgers Gleichung

$$u_t + uu_x = u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

Charakteristiken = Kurven $(x(t), t)$ mit: $x(t)$ löst $\frac{dx}{dt} = u$

Entlang der Kurven $(x(t), t)$ gilt wieder:

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} u(x(t), t) = u_x \frac{dx}{dt} + u_t = u_x \cdot u + u_t$$

also für jede Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = u_x \cdot u + u_t = 0$$

⇒ Lösung u konstant entlang Charakteristik

⇒ $\dot{x}(t) = u$ konstant entlang Charakteristik

⇒ Charakteristiken haben konstante Steigung

⇒ Charakteristiken sind

Idee : Bestimme zu $(x(t), t)$ auf der zugehörigen Charakteristik $x_0 = x(0)$ in der Form

$$x_0 = x_0(x, t)$$

Dann gilt $u(x, t) = u_0(x_0(x, t))$

Frage : Geht das immer eindeutig?

Methode aus letzter HÜ für

$$u_t + uu_x = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

$$\frac{du}{dt} = 0 \implies u(x(t), t) = c_2$$

$$\frac{dx}{dt} = u = c_2 \implies x(t) = c_2 t + c_1 = ut + c_1$$

Also $c_1 = x - ut$ und $c_2 = u$, sowie:

$$x(0) = c_1 = x - ut \implies u = u_0(x - ut).$$

Oder wie in der letzten HÜ:

$$c_2 = g(c_1) \iff u = g(x - ut) \text{ (allgemeine Lösung)}$$

$$t = 0 : u(x, 0) = g(x) \stackrel{!}{=} u_0(x) \text{ Also } u = u_0(x - ut).$$

Wegen $\dot{x}(t) = u = u(x(t), t) = u(x(0), 0) = u_0(x(0))$ erhalten wir die

Charakteristiken: $x(t) = x(0) + u_0(x(0)) \cdot t$

Steigung in der $x - t$ -Ebene:

$x(t)$ wächst auf der Charakt. mit der Rate/dem Faktor:

Beispiel:

$$u(x, 0) = \begin{cases} -2 & x < -2 \\ x & -2 \leq x \leq 2 \\ 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

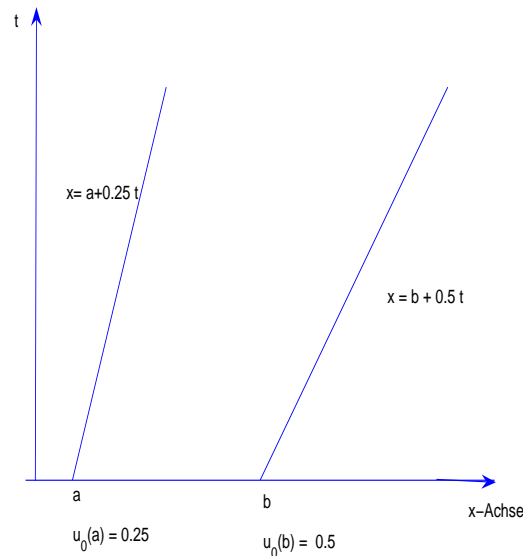
Fall 1) u_0 stetig und $u_0(a) \leq u_0(b) \quad \forall a < b$.

Es sei $(x_a(t), t)$ die Charakteristik durch $(a, 0)$ und $(x_b(t), t)$ die Charakteristik durch $(b, 0)$.

Dann gilt: $\dot{x}_a(t) = u_0(a)$ und $\dot{x}_b(t) = u_0(b)$ und damit

$$\dot{x}_b \geq \dot{x}_a \quad \forall b \geq a$$

x wächst auf der Charakteristik durch $(b,0)$ mindestens so schnell wie auf der Charakteristik durch $(a,0)$. Qualitativ erhält man folgendes Bild

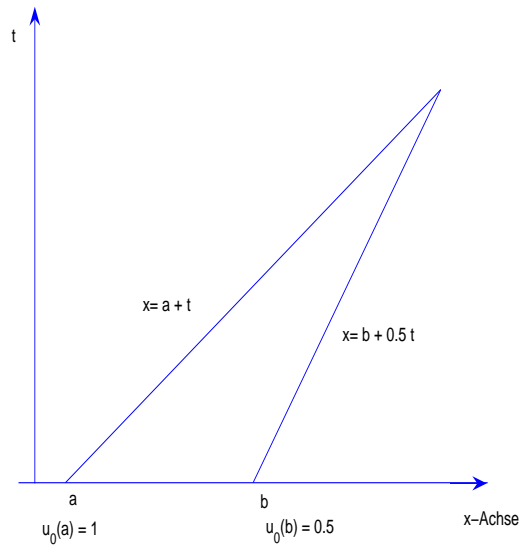


Die Charakteristik durch $(a,0)$ kann die Charakteristik durch $(b,0)$ nicht einholen. Es gibt keine Schnittpunkte von Charakteristiken! Lösung ist eindeutig.

Fall 2) u_0 stetig und $u_0(a) > u_0(b)$ für irgendein $a < b$. Dann gilt

$$\dot{x}_a > \dot{x}_b$$

Die Charakteristik durch $(a,0)$ holt die Charakteristik durch $(b,0)$ irgendwann ein! Es kommt zu Mehrdeutigkeiten!!



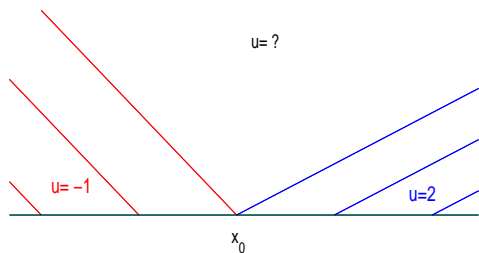
Die Mehrdeutigkeit tritt spätestens dann auf, wenn für ein x_0 und ein $\delta \in \mathbb{R}$ folgendes gilt:

$$x_0 + u_0(x_0) \cdot t = (x_0 + \delta) + u_0(x_0 + \delta) \cdot t .$$

Fall 3) u_0 monoton steigend aber nicht stetig.

Es gibt irgendwo einen Sprung in den Steigungen und damit Gebiete in denen keine Charakteristiken verlaufen.

Beispiel: Burgers Gleichung mit
$$u(x, 0) = \begin{cases} -1 & x < x_0 \\ 2 & x \geq x_0 \end{cases}$$



Für $t > 0$

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & x \leq x_0 - t, \\ ? & x_0 - t < x < x_0 + 2t \\ 2 & x \geq x_0 + 2t. \end{cases}$$

Vorlesung: Der charakteristikenfreie Bereich wird durch eine sogenannte

Verdünnungswelle
$$u(x, t) = \frac{x - x_0}{t}$$

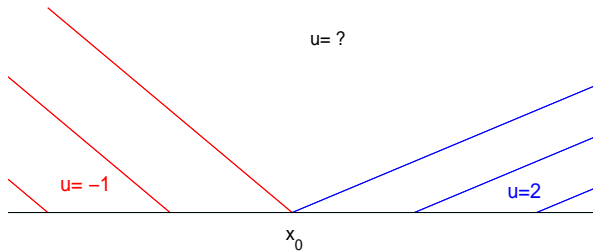
aufgefüllt.

Genauer: Für die Burgers Gleichung mit $u_l < u_r$:

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l & x < x_0 \\ u_r & x \geq x_0 \end{cases} \implies$$

$$\text{löst } u(x, t) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 + u_l \cdot t, \\ \frac{x - x_0}{t} & x_0 + u_l \cdot t < x < x_0 + u_r \cdot t, \\ u_r & x \geq x_0 + u_r \cdot t. \end{cases} \quad t > 0$$

in jedem einzelnen (x, t) – Bereich die Differentialgleichung. In unserem Beispiel



Auf der letzten roten Linie:

$$u(x(t), t) = \frac{x - x_0}{t} = -1$$

Auf der ersten blauen Linie:

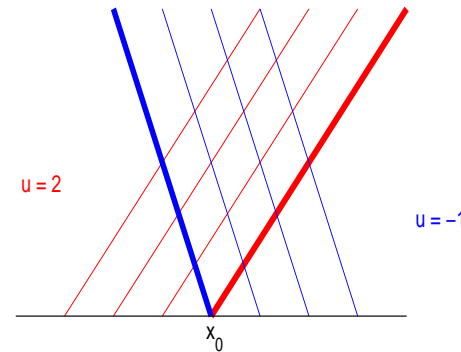
$$u(x(t), t) = \frac{x - x_0}{t} = 2$$

Fall 4) u_0 springt nach unten.

Es gibt irgendwo einen Sprung in den Steigungen und die Charakteristiken schneiden sich.

Beispiel: Burgers Gleichung mit

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l = 2 & x < x_0 \\ u_r = -1 & x \geq x_0 \end{cases}$$



Vorlesung: Die Unstetigkeit bewegt sich entlang einer sogenannten

Stoßwelle $s(t)$ (Schock)

Frage: $s(t) = ?$

Schwache Lösungen: (Vorlesung Seiten 64- 68)

Testfunktionen $v(x, t)$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}^+$ diffbar mit kompaktem Träger:

$$u_t + (f(u))_x = 0$$

Partielle Integration

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty (uv_t + v_x f(u)) dx dt + \int_{-\infty}^\infty u_0(x)v_0(x) dx = 0$$

Bei einer Stoßfront (Unstetigkeitskurve) $s(t)$ muss gelten:

Rankine- Hugoniot- Sprungbedingung:

$$\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} =: \frac{[f]}{[u]}$$

für Burgers also $\dot{s}(t) = \frac{\frac{u_l^2}{2} - \frac{u_r^2}{2}}{u_l - u_r} = \frac{u_l + u_r}{2}$

Physik / Betrachtung Grenzfall von Lösungen von

$u_t + (f(u))_x = \epsilon u_{xx}$ für $\epsilon \rightarrow 0$ liefert:

Sei f streng konvex. Die physikalisch sinnvolle schwache Lösung (**Entropielösung**) von $u_t + (f(u))_x = 0$ erfüllt die **Entropiebedingung**:

$$\exists C > 0 : \forall x \in \mathbb{R}, t, z \in \mathbb{R}^+ : u(x + z, t) - u(x, t) < \frac{C}{t} z.$$

Damit kann ein Sprung in u nur nach oben erfolgen und jede Stoßfront $s(t)$ einer Entropielösung erfüllt:

$$f'(u_l) > \dot{s} > f'(u_r)$$

Das bedeutet für die Burgers Gleichung:

Zusammenfassung:

$$u_t + (f(u))_x = 0, (f \text{ streng konvex}), \quad u(x, 0) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 \\ u_r & x \geq x_0 \end{cases}$$

- $u_l > u_r$: Stoßfront $s(t)$ mit $\dot{s}(t) = \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l & x \leq x_0 + \dot{s}(t) \cdot t, \\ u_r & x > x_0 + \dot{s}(t) \cdot t. \end{cases}$$

- $u_l < u_r$: Verdünnungswelle. Mit $g = (f')^{-1}$

$$\begin{cases} u_l & x \leq x_0 + f'(u_l) \cdot t, \\ g\left(\frac{x - x_0}{t}\right) & x_0 + f'(u_l) \cdot t < x < x_0 + f'(u_r) \cdot t \\ u_r & x \geq x_0 + f'(u_r) \cdot t. \end{cases}$$

Zu unseren Beispielen: $u_t + u \cdot u_x = 0$ also $f(u) = \frac{u^2}{2}$, $f'(u) = u = \text{Identität}$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l = 2 & x < x_0 \\ u_r = -1 & x \geq x_0 \end{cases} \implies \dot{s}(t) =$$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l = 2 & x < \\ u_r = -1 & x > \end{cases}$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_l = -1 & x < x_0 \\ u_r = 2 & x \geq x_0 \end{cases} \implies$$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_l = -1 & x < \\ & \leq x \leq \\ u_r = 2 & x > \end{cases}$$

Weitere Beispiele:

A: Mehrere Verdünnungswellen

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1 & x \leq -2, \\ 0 & -2 < x \leq 3, \\ 1 & x > 3. \end{cases}$$

\implies

$$u(x, t) = \begin{cases} -1 & x \leq \\ & < x \leq \\ 0 & < x \leq \\ & < x \leq \\ 1 & x > \end{cases}$$

B: Mehrere Stoßwellen

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \leq -1, \\ -1 & -1 < x \leq 1, \\ -2 & x > 1. \end{cases}$$

Zunächst erhält man

$$s_1(t) =$$

$$s_2(t)$$

\implies

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x < \\ -1 & < x < \\ -2 & x > \end{cases}$$

Aber nur so lange bis sich die Stoßfronten treffen:

$$s_1(t^*) \stackrel{!}{=} s_2(t^*) \implies$$

Neue Stoßfront mit $u_l =$ und $u_r =$

$$s_3(t) = s_3(t^*) + \dot{s}_3(t)(t - t^*)$$

$$\dot{s}_3 = \frac{u_l + u_r}{2}$$

Für $t > t^* =$

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x < s_3(t) \\ -2 & x > s_3(t) \end{cases}$$

C: Stoßwelle trifft Verdünnungswelle

$$u(x, 0) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \leq 0, \\ 0 & 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ -1 & x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Zunächst erhält man wie gehabt eine Verdünnungswelle und eine Stoßwelle:

(Schwache) Lösung zunächst, also für hinreichend kleine t :

$$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \leq \\ \frac{x-0}{t} & < x \leq \\ 0 & < x \leq \\ -1 & x > \end{cases}$$

Kann nur gelten bis $t = 1$.

Dann: Neue Unstetigkeit $s(t)$ mit

$$u_l = \frac{x_l}{t}, \quad u_r = -1$$

$$u_l = \frac{s(t)}{t}, \quad u_r = -1 \implies$$

$$\dot{s}(t) = \frac{\frac{s(t)}{t} - 1}{2}$$

$$\dot{s}(t) = \frac{1}{2t} \cdot s(t) - \frac{1}{2} \quad (\text{inhom. lin. ODE}) \quad \dot{s}_h(t) = \frac{1}{2t} \cdot s_h(t)$$

$$s_h(t) = ct^{1/2},$$

$$s_p(t) = c(t)t^{1/2} \implies \dot{c}(t)t^{1/2} \stackrel{!}{=} -\frac{1}{2}$$

$$\implies \dot{c}(t) = -\frac{1}{2}t^{-1/2}$$

$$c(t) = -t^{1/2} + d$$

$$\text{also z.B. } s_p(t) = -t^{1/2} \cdot t^{1/2} = -t$$

$$s(t) = c\sqrt{t} - t$$

Und nun? Anfangswert? Wo geht $s(t)$ los?

Für $t > 1$ gilt zunächst:

$$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \leq -\frac{t}{2} \\ \frac{x}{t} & -\frac{t}{2} < x \leq \sqrt{t} - t \\ -1 & x > \sqrt{t} - t \end{cases}$$

Wie lange?

Für $t = 4$ gilt $-\frac{t}{2} = \sqrt{t} - t$

Stoßwelle ist durch Verdünnungswelle durch! $s(4) = -2$, $u_l = -\frac{1}{2}$, $u_r = -1$

Neue Formel für Stoßfront für $t \geq 4$:

$$s(t) = s(4) + \dot{s}(t)(t - 4) = -2 + \frac{-\frac{1}{2} - 1}{2} \cdot (t - 4)$$

$$u(x, t) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x \leq -\frac{3}{4}t + 1, \\ -1 & x > -\frac{3}{4}t + 1. \end{cases}$$

Zur Hausaufgabe 2

Zur Erinnerung: Erhaltungsgleichung lautet

$$(\text{Dichte})_t + (\text{Fluss})_x = 0 \quad \text{hier: } u_t + q_x = 0$$

wobei

$$\text{Fluß} = \text{Geschwindigkeit} \cdot \text{Dichte}$$

Wenn Sie Teil a) nicht schaffen, geht es in b) weiter mit

$$u_t + \left(u \cdot v_{max} \left(1 - \frac{u}{u_{max}} \right) \right)_x = 0$$

Die Bedingung für Stoßwellen ist zwar bei Burgers $u_l > u_r$, im Allgemeinen aber:

$$f'(u_l) > f'(u_r) \quad \text{hier} \quad q'(u_l) > q'(u_r)$$

Die Sprungbedingung muss gelten!

Stoßwellen: Charakteristiken laufen in Stoßfront rein!