Hörsaalübung 2 Differentialgleichungen II
Quasilineare Differentialgleichungen erster Ordnung
Charakteristikenmethode

Letztes Beispiel der letzten Hörsaalübung:

$tu_t + yu_y + 2xu_x = 0, \qquad x, y \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R}^+$

Zum Beispiel versehen mit Anfangsbedingung $u(x, y, 1) = \sin(x)e^{-y}$.

Suche Charakteristiken d.h. Kurven $(x(t), y(t), t)$ mit $u(x(t), y(t), t)$ konstant!

Charakteristisches Differentialgleichungssystem mit t als Parameter für $t \neq 0$:

$\frac{dx}{dt} =$ $\qquad\qquad$ $\frac{dy}{dt} =$

Neu: Quasilineare Dgl. 1. Ordnung :

Darf inhomogen sein! Koeffizienten dürfen von $u-$ abhängen!
Zum Beispiel:

$$1 \cdot u_t(x,t) \,+\, a(x,t,u)\, u_x(x,t) \,=\, b(x,t,u)\,.$$

Hilfsproblem : Suche Funktion $U(x,t,u)$, die die PDE

$$1 \cdot U_t \,+\, a(x,t,u) \cdot U_x \,+\, b(x,t,u) \cdot U_u \,=\, 0 \tag{1}$$

löst. Wie oben stellen wir auf:
Das charakteristische Differentialgleichungssytem mit s als Parameter

$$\frac{dt}{ds} \,=\, 1 \qquad \frac{dx}{ds} \,=\, a(x,t,u), \qquad \frac{du}{ds} \,=\, b(x,t,u)$$

oder (mit t als Parameter)

$$\frac{dx}{dt} \,=\, a(x,t,u)\,, \qquad \frac{du}{dt} \,=\, b(x,t,u). \tag{2}$$

Dann gilt längs dieser Kurven (**Charakteristiken**)

$$\frac{d}{ds} U\left(x(s), t(s), u(s)\right) \;=\; U_x \cdot \frac{dx}{ds} \;+\; U_t \cdot \frac{dt}{ds} \;+\; U_u \cdot \frac{du}{ds}$$
$$= \; U_t \;+\; a\,U_x \;+\; b\,U_u \;=\; 0$$

falls U eine Lösung der DGL (1) ist.

Integration des Systems (2) $\Longrightarrow$ Zwei Integrationskonstanten C_1, C_2

Charakteristiken werden durch 2 Parameter festgelegt

$U(x,t,u) = \tilde{\Phi}(C_1, C_2) = K$ konstant auf Charakteristiken

$$\Phi = \tilde{\Phi} - K \implies \Phi(C_1, C_2) = \Phi(C_1(x,t,u), C_2(x,t,u)) = 0$$

Auf jeder Charakteristik: $U(x,t,u) - K = 0$.

Falls $U_u \neq 0$, dann kann nach u aufgelöst werden.

Satz über implizite Funktionen: falls $U_u \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_t \end{pmatrix} = -(U_u)^{-1} \begin{pmatrix} U_x \\ U_t \end{pmatrix}$$

Also $U_x = -u_x \cdot U_u \qquad U_t = -u_t \cdot U_u$

$$\begin{aligned} U_t + a\,U_x + b\,U_u = 0 &\iff -u_t \cdot U_u - a\,u_x \cdot U_u + b\,U_u = 0 \\ &\iff -u_t - a\,u_x + b = 0 \end{aligned}$$

u löst also ursprüngliche Differentialgleichung.

Beispiel 1: Eine lineare inhomogene Anfangswertaufgabe

$$u_t - 2u_x = t, \qquad u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$$

Charakteristisches Differentialgleichungssystem:

$\frac{dx}{dt} =$ $\qquad\qquad$ $\frac{du}{dt} =$

$\Longrightarrow x(t) =$ $\qquad\qquad$ $u(t) =$

$C =$ $\qquad\qquad$ $D =$

Beispiel 2)

$$u_x + y^2 u_y = u^2, \qquad u(x,1) = 1 \qquad x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}^+$$

Hilfsproblem :

U

$$\frac{dx}{ds} = \qquad , \qquad \frac{dy}{ds} = \qquad , \qquad \frac{du}{ds} =$$

oder $\quad \dfrac{dy}{dx} = \qquad , \qquad \dfrac{du}{dx} =$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx \,, \Longrightarrow -\frac{1}{y} = x - c_1 \Longrightarrow \boxed{c_1 = \frac{1}{y} + x}$$

völlig analog erhält man $\boxed{c_2 = \dfrac{1}{u} + x}$

Lösungen erfüllen : $\quad \Phi(c_1, c_2) = \Phi(\dfrac{1}{y} + x,\ \dfrac{1}{u} + x) = 0$

Im Falle der Auflösbarkeit gilt: $c_2 = f(c_1)$

$$\frac{1}{u} + x =$$

Anfangswerte $\quad u(x,1) \stackrel{!}{=} 1$:

$$\frac{1}{u(x,y)} + x = f(\frac{1}{y} + x) \xrightarrow{y=1}$$

$$\frac{1}{1} +$$

Einsetzen in die Gleichung für $\frac{1}{u}$ ergibt:

Andere Anfangsbedingungen:

Zum Beispiel: Die Kurve $(x, \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{2(1+x^2)+x})$ soll enthalten sein.

Was bedeutet das?

Allgemeine Lösung war: $u(x, y) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{y} + x\right) - x}$

Beispiel 3:

Bestimmen Sie die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$
\begin{aligned}
u_t + 2xu_x &= tu, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R}^+, \\
u(x,0) &= \sin(x).
\end{aligned}
$$

Weisen Sie durch Einsetzen in die Differentialgleichung und in die Anfangsbedingung nach, dass Sie tatsächlich eine Lösung gefunden haben.

Lösung:

Für die Charakteristiken gilt

$$\frac{dx}{dt} = 2x \quad \Longrightarrow$$

$$x(t) = c_1 e^{2t}, \qquad c_1 = xe^{-2t}.$$

Auf diesen Charakteristiken gilt

$$\frac{du}{dt} = tu \quad \Longrightarrow$$

$u(x(t), t) = c_2 e^{\frac{t^2}{2}} \Longrightarrow$

Also $c_2 = \ ue^{-\frac{t^2}{2}}$

Mit einem geeigneten Φ gilt dann: $\Phi(c_1, c_2) = 0 \Longrightarrow$

Falls auflösbar nach $c_2 : \ c_2 = \ f(c_1)$:

$c_2 =$

Andererseits $u(x, 0) \stackrel{!}{=} \sin(x)$, also

$u(x, 0) =$

Damit erhalten wir die Lösung

$$u(x, t) = \sin(xe^{-2t}) \cdot e^{\frac{t^2}{2}} .$$

Probe:

$$u(x,t) = \sin(xe^{-2t}) \cdot e^{\frac{t^2}{2}},$$

$$u_t =$$

$$u_t =$$

$$u_x = e^{\frac{t^2}{2}} \cos(xe^{-2t}) \frac{d}{dx}(xe^{-2t}) \; =$$

Also:

$$u_t + 2xu_x =$$

$$u(x,0) =$$

Beispiel 4) (ARWA)

Ermitteln Sie die Lösung $u(x,t)$ der folgenden Anfangswertaufgabe

$$\begin{aligned} u_t + 2u_x + u &= 0, \qquad x,t > 0 \\ u(x,0) &= 0 \qquad (x \geq 0) \\ u(0,t) &= t^2 \qquad (t \geq 0) \end{aligned}$$

a) mittels der Charakteristikenmethode. Man bestimme dazu jeweils die Lösung zur Anfangsbedingung $u(x,0)=0$, bzw. $u(0,t)=t^2$ und setze diese Lösungen glatt zusammen.

b) mittels Laplace–Transformation bzgl. der Variablen t. Bei der Transformation ist x als Parameter aufzufassen. Im Bildraum ist eine Anfangswertaufgabe bzgl. einer gewöhnlichen Differentialgleichung in x zu lösen.

a) Mit der Charakteristikenmethode erhält man: $\dfrac{dx}{dt} = 2$, $\dfrac{du}{dt} = -u$

$x(t) = 2t + C_1 \qquad u(x(t),t) = C_2 e^{-t}$

$\Longrightarrow \; C_1 = x - 2t, \; C_2 = ue^t$

$\Phi\left(x - 2t, ue^t\right) = 0$ liefert bei Auflösbarkeit

$u = e^{-t} f(x - 2t)$.

Aus der Bedingung $u(0, t) = t^2$ erhält man

$t^2 = e^{-t} f(0 - 2t)$

oder mit $\mu = -2t$ bzw. $t = -\frac{\mu}{2}$

$f(\mu) = \left(-\frac{\mu}{2}\right)^2 e^{-\frac{\mu}{2}}$

und damit erhält man für die Lösung

$$u(x, t) = e^{-t} f(x - 2t) = e^{-t}\left(-\frac{x - 2t}{2}\right)^2 e^{\frac{-(x-2t)}{2}} \; = \; e^{-\frac{x}{2}}\left(t - \frac{x}{2}\right)^2$$

Setzt man dagegen in die allgemeine Lösung $\tilde{u}(x,t) = e^{-t}\tilde{f}(x-2t)$

Die Anfangsdaten $\tilde{u}(x,0) = 0$ ein, so erhält man:

Die Lösungen können entlang Kurven glatt zusammen gesetzt werde, auf denen $u = \tilde{u}$ gilt. Dies ist auf der Geraden $t = x/2$ der Fall. Man erhält also als Lösung des ursprünglichen Problems

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & t < \dfrac{x}{2} \\ e^{-\frac{x}{2}}\left(t - \frac{x}{2}\right)^2 & t \geq \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

b) Laplace Transformation von

$$u_t + 2u_x + u \;=\; 0, \qquad u(x,0) \;=\; 0$$

bzgl. t ergibt

$$sU + 2U_x + U = 0 \implies U_x = -\tfrac{1}{2}(s+1)U.$$

Dies ist eine gewöhnliche Dgl. für $U(x,s)$ mit den Anfangsdaten

$$U(0,s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, u(0,t) = t^2, \text{ also} \qquad U(0,s) = \frac{2}{s^3} \bullet\!\!-\!\!\circ\, t^2.$$

Die Lösung ist:

$$U(x,s) = \frac{2}{s^3}\, e^{-\frac{s+1}{2}\,x} = e^{-\frac{x}{2}}\, \frac{2}{s^3}\, e^{-\frac{x}{2}s}$$

$$\bullet\!\!-\!\!\circ\, e^{-\frac{x}{2}} h_{\frac{x}{2}}(t) \left(t - \tfrac{x}{2}\right)^2 = \begin{cases} 0 & t \;<\; \frac{x}{2} \\ e^{-\frac{x}{2}} \left(t - \frac{x}{2}\right)^2 & t \geq \frac{x}{2} \end{cases}$$

Zur Erinnerung:

Für

$f \circ\!\!-\!\!\bullet F,\ g \circ\!\!-\!\!\bullet G$

und

$$h_a(t) := \begin{cases} 1 & t \geq a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

gilt

f	F	σ
1 oder $h_0(t)$	$\frac{1}{s}$	0
$h_a(t)$	$e^{-as}\frac{1}{s}$	0
$t^n, \quad n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	0
$e^{at}, \quad a \in \mathbb{C}$	$\frac{1}{s-a}$	Re (a)
$\sin(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	0
$\cos(\omega t), \quad \omega \in \mathbb{R}$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	0
$\delta(t)$	1	0

einige wichtige Rechenregeln: Es gelten $f \circ\!\!-\!\!\bullet F$, $g \circ\!\!-\!\!\bullet G$. Dann folgt

$I)$	$\alpha f + \beta g$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\alpha F + \beta G$	Linearität
$II)$	$f(\alpha t)$ $\alpha > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right)$	Streckung im O–Raum
$III)$	$h_a(t) f(t-a)$ $a > 0$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-sa} F(s)$	Verschiebung im O–Raum
$IV)$	$e^{at} f(t)$ $a \in \mathbb{C}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s-a)$	Verschiebung im Bildraum/ Mult. mit exp-Fkt im O–Raum