Fachbereich Mathematik der Universität Hamburg
Dr. Hanna Peywand Kiani

SoSe 19
12.07.2019

Klausurberatung Differentialgleichungen II für Studierende der Ingenieurwissenschaften

Die ins Netz gestellten Unterlagen sollen nur die Mitarbeit während der Veranstaltung erleichtern. Ohne die in der Veranstaltung gegebenen zusätzlichen Erläuterungen sind diese Unterlagen unvollständig und möglicherweise irreführend!

Tipp– oder Schreibfehler, die rechtzeitig auffallen, werden nur mündlich während der Veranstaltung angesagt. Eine Korrektur im Netz erfolgt nicht!

Die Aufzählung wichtiger Themen bedeutet NICHT den Ausschluss anderer Themen für die Klausur.

Eine Veröffentlichung dieser Unterlagen an anderer Stelle ist untersagt!

Absolut notwendige Techniken

- Einfache gewöhnliche DGL lösen, zum Beispiel
  - Separierbare (vgl. z. B. Charakteristiken Methode)
  - Lineare mit konstanten Koeffizienten (vgl. z. B. Wärmeleitungsgleichung)

$$\dot{y}(t) + \alpha y(t) = p_n(t) \cdot e^{\mu t}, \qquad p_n \text{ Polynom n-ten Gerades}$$

$y_h(t) = \gamma e^{-\alpha t}$

Ansatz: $y_p(t) = \gamma(t) e^{\overset{-\alpha}{\cancel{\alpha}} t}$ oder,
vorausgesetzt $-\alpha \neq \mu$: $y_p(t) = (d_0 + d_1 t + d_2 t^2 + \ldots + d_n t^n) \cdot e^{\mu t}$

$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$

γ über Anfangswert bestimmen!

- Ganz einfache Integrale, partielle Integration

  Zum Beispiel für d'Alembert, Fourierkoeffizienten, Charakteristiken

- Fourier-Koeffizienten berechnen (Blätter 5 und 6)

- polar $<--->$ kartesisch (Blatt 5)

- Determinante/Eigenwerte von 2x2 Matrizen (Blatt 4)

Blatt 1:

P1: Transpotgleichung $u_t - cu_x = 0$

P2: $xu_t - tu_x = 0$ Charakteristikengleichungen/-skizzen, Lösen der AWA

H1: Verkehrsmodel, Kontinuitätsgleichung

H2: Lösungen Eigenwertaufgabe $y'' = \lambda y$, $y(0) = y(L) = 0$

Blatt 2:

P1, P2, H1: Charakteristiken-Methode, AWA: lösen über erweitertes Problem

P3: Vorbereitung Burgers Gleichung: sollte inzwischen kein Problem sein

H2: Charakteristiken-Methode, Viertelebene, Laplace-Transformation

Blatt 3:

P1: Erhaltungsgleichung, Charakteristiken, Sprungbedingung, Entropielösung

P2: Burgers Gleichung: zwei Verdünnungswellen, zwei Stoßwellen

H1a: Burgers Gleichung: Verdünnungswellen **und** Stoßwelle

H1b: Burgers Gleichung: Irreversibiltät mittels Zeichnen der Charakteristiken feststellen

H2: Verkehrsmodell, nicht konvexe Flussfunktion

H2a: Kontinuitätsgleichung aufstellen

H2b: Sind die Charakteristiken Geraden?

H2c: Charakteristiken skizzieren

H2d: Entropiebedingung

Blatt 4:

P1: Transformation auf Diagonalform und Typ bestimmen
(parabolisch, elliptisch, hyperbolisch)

P2: AWA Wellengleichung
P2a) Inhomogene Differentialgleichung
P2b) Homogene Differentialgleichung, d'Alembert
P2c) Zusammensetzen

H1: Typ (parabolisch, elliptisch, hyperbolisch) bestimmen

H2a: AWA Wellengleichung, d'Alembert

H2b: AWA Wellengleichung, d'Alembert, unstetige Daten, Skizze

Blatt 5:

P1: Laplace-Gleichung auf Rechteck,
Randwerte auf einer Kante $\neq 0$

P2: Prüfen ob Funktion harmonisch ist, Mittelwerteigenschaft

H1a: Min/Max für Lösung der Poisson Gleichung

H1b: RWA Laplace Gleichung: Maximum Prinzip

H2a: Rotationssymmetrische Lösung der Laplace-Gleichung auf Ringsektor

H2b: Laplace-Gleichung auf Kreisscheibe

Blatt 6:

P: ARWA Wärmeleitung, inhomogene Randdaten und inhomogene DGl

H1: Herleitung Lösungsansatz für Neumann-Randbedingungen

H2: Wellengleichung: homogene Randdaten und inhomogene DGl

In der Klausur: direkt die in Vorlesung/HÜ erarbeiteten Lösungsformeln verwenden!

Zusammenstellung einiger (nicht aller) geschlossener Lösungsformeln
(ohne Gewähr, bitte vor der Klausur mit Vorlesung/Formelsammlung abgleichen!)

Wellengleichung:

A) AWA, homogen:

$\tilde{u}_{tt} - c^2\tilde{u}_{xx} = 0$, $\tilde{u}(x,0) = f(x)$, $\tilde{u}_t(x,0) = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\,[f(x+ct) + f(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(\alpha)\,d\alpha$$

B) AWA, inhomogen:

B) ARWA, homogene Differentialgleichung, homogene Randwerte:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \qquad x \in (0, L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = w_0(x) \qquad x \in (0, L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0 \qquad \omega := \frac{\pi}{L}$$

$$u(x,t) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \ \cos\left(ck\omega t\right) \ + \ B_k \ \sin\left(ck\omega t\right)\right] \ \sin\left(k\omega x\right)$$

$$u(x,0) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \ \sin\left(k\omega x\right) \ \stackrel{!}{=} u_0(x)$$

$$u_t(x,0) \ = \ \sum_{k=1}^{\infty} \ ck\omega \cdot B_k \ \sin\left(k\omega x\right) \stackrel{!}{=} w_0(x)$$

Eventuell Koeffizientenvergleich möglich. Sonst:

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(\alpha) \sin(k\omega\alpha)\, d\alpha, \quad B_k = \frac{2}{ck\pi} \int_0^L w_0(\alpha) \sin(k\omega\alpha)\, d\alpha$$

bzw. $B_k = \dfrac{L}{ck\pi} b_k$ mit $b_k = \dfrac{2}{L} \displaystyle\int_0^L w_0(\alpha) \sin(k\omega\alpha)\, d\alpha,$

C) **Inhomogene** Differentialgleichung, **homogene** Randdaten

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t) \qquad c > 0,\ x \in (0,L),\ t > 0$$

D) ARWA, inhomogene Randwerte:

$$\begin{aligned} & u_{tt} - c^2 u_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0 \\ & u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = v_0(x) \qquad x \in (0,L) \\ & u(0,t) = f(t) \qquad u(L,t) = g(t) \qquad t > 0 \end{aligned}$$

Randwerte homogenisieren

$$w(x,t) = u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}(g(t) - f(t))$$

ergibt neue Aufgabe für w mit homogenen Randwerten.

Wärmeleitungsgleichung
I) ARWA, inhomogene Differentialgleichung, homogene Randwerte :

$$u_t - cu_{xx} = h(x,t), \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = 0 \qquad u(L,t) = 0 \qquad t > 0$$

Ansatz: $u(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\,\sin(n\omega x) \qquad \omega = \frac{\pi}{L}$

liefert die Anfangswertaufgaben

$\dot{a}_n(t)(t) \,+\, cn^2\omega^2\, a_n(t) \,=\, c_n(t), \quad a_n(0) = b_n$

Wenn möglich die c_n und/oder b_n über Koeffizientenvergleich in

$$h(x,t) \overset{!}{=} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin(n\omega x)\,,$$
und/oder
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(n\omega x) \overset{!}{=} u_0(x) \qquad \text{bestimmen.}$$

Wenn Koeffizientenvergleich nicht möglich, dann über

$$c_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L h(x,t) \sin(n\omega x) dx$$
bzw.
$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin(n\omega x) dx$$

Für alle n mit $c_n(t) = b_n = 0$ wähle $a_n(t) \equiv 0$

Für die n mit $c_n(t)$ und/oder $b_n \neq 0$ löse zugehörige AWA'n $\longrightarrow$ $a_n(t)$

Einsetzen der $a_n(t)$ in den Anatz liefert u

II) ARWA, inhomogene Randwerte:

$$u_t - c\tilde{u}_{xx} = h(x,t), \qquad \tilde{\ }x \in (0,L),\ t > 0$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad x \in (0,L)$$

$$u(0,t) = f(t) \qquad u(L,t) = g(t) \qquad t > 0$$

Randwerte homogenisieren

$$v(x,t) = u(x,t) - f(t) - \frac{x}{L}(g(t) - f(t))$$

ergibt neue Aufgabe für v mit homogenen Randwerten.

Laplacegleichung auf Ringen, Kreissegmenten, Innerhalb oder außerhalb von Kreisscheiben etc.

Laplace Operator in Polarkoordinaten:

$$\boxed{r^2 \cdot \Delta u = 0 \iff r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\phi\phi} = 0\,.}$$

$$\boxed{u(r,\phi) = c_0 + d_0 \ln(r) + \sum_{k=1}^{\infty} (c_k r^{-k} + d_k r^k)(a_k \cos(k\phi) + b_k \sin(k\phi))}$$

Je nach Gebiet müssen nicht beschränkte Summanden ausgeschlossen werden. Siehe unten.

Charakteristikenmethode

$$u_t(x,t) + a(x,t,u)\, u_x(x,t) = b(x,t,u)\,.$$

Hilfsproblem :

$$U_t + a \cdot U_x + b \cdot U_u = 0 \tag{1}$$

$$\frac{dt}{ds} = 1 \qquad \frac{dx}{ds} = a(x,t,u), \qquad \frac{du}{ds} = b(x,t,u)$$

oder (mit t als Parameter)

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t,u)\,, \qquad \frac{du}{dt} = b(x,t,u). \tag{2}$$

Lösen/Integrieren liefert $C_1(x,t,u), C_2(x,t,u)$

Setze $C_2 = f(C_1)$

und besimme f mit Hilfe der Anfangsbedingung

Burgers und ähnliche Gleichungen, Verdünnungs- und Stoßwellen

$$u_t(x,t) + u\, u_x(x,t) = 0\,.$$

$$\frac{dx}{dt} = u(x(t),t) = u\,, \qquad \frac{du}{dt} = 0. \tag{3}$$

Charakteristikensteigung hängt nur von u ab

u ist konstant auf Charakteristik

Charakteristiken sind Geraden.

Oft sind Skizzen hilfreich

Sprungbedingung

Entropielösung