

Kapitel 2: Partielle Differentialgleichungen 1. Ordnung

2.1 Die Methode der Charakteristiken

Wir betrachten zunächst eine skalare quasilineare PDE 1. Ordnung gegeben durch

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Eine Lösung kann durch die **Charakteristikenmethode** berechnet werden, wobei wir zunächst den homogenen und **linearen** Fall betrachten.

Definition: Das autonome System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$$

heißt das **charakteristische Differentialgleichungssystem** einer homogenen linearen PDE

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}) u_{x_i} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Wir berechnen nun

$$\frac{d}{dt}u(\mathbf{x}(t)) = \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}(t))u_{x_i}(\mathbf{x}(t))$$

Daraus folgt aber sofort:

Die Funktion $u(\mathbf{x})$ ist genau dann eine Lösung der partiellen Differentialgleichung, wenn u entlang jeder Lösung $\mathbf{x}(t)$ des charakteristischen Differentialgleichungssystems konstant ist, d.h.

$$u(\mathbf{x}(t)) = \text{const.}$$

Definition:

Man nennt die Lösung $u(\mathbf{x})$ dann ein **erstes Integral** des charakteristischen Differentialgleichungssystems.

Die Methode der Charakteristiken ist also nichts anderes als eine Zurückführung der gegebenen PDE auf gewöhnliche DGL's.

Beispiel: Wir betrachten die PDE in drei Variablen

$$xu_x + yu_y + (x^2 + y^2)u_z = 0$$

Das charakteristische System lautet dann

$$\dot{x} = x$$

$$\dot{y} = y$$

$$\dot{z} = x^2 + y^2$$

und besitzt die allgemeine Lösung

$$x(t) = c_1 e^t$$

$$y(t) = c_2 e^t$$

$$z(t) = \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)e^{2t} + c_3$$

Man nennt diese Lösungen auch die charakteristischen Kurven.

Für die Lösung der Ausgangsgleichung gilt damit

$$u(x(t), y(t), z(t)) = u\left(c_1 e^t, c_2 e^t, \frac{1}{2}(c_1^2 + c_2^2)e^{2t} + c_3\right) = \text{const.}$$

Die charakteristischen Kurven erfüllen aber die Beziehungen:

$$e^t = x(t)/c_1 = y(t)/c_2 \quad \Rightarrow \quad y(t)/x(t) = c_2/c_1 = c \in \mathbb{R}$$

und

$$z(t) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_3 \quad \Rightarrow \quad z(t) - \frac{1}{2}(x(t)^2 + y(t)^2) = d \in \mathbb{R}$$

d.h. allein die beiden Konstanten c und d definieren den Wert von u entlang der charakteristischen Kurven.

Daraus folgt die Lösungsdarstellung

$$u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{y}{x}, z - \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right)$$

mit einer beliebigen C^1 -Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Quasilineare inhomogene Differentialgleichungen

Die Methode der Charakteristiken läßt sich auf Gleichungen der Form

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

übertragen.

Man betrachtet dazu das erweiterte Problem

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

mit der unbekanntem Funktion $U = U(\mathbf{x}, u)$ von $(n+1)$ unabhängigen Variablen \mathbf{x} und u .

Dann gilt: Ist $U(\mathbf{x}, u)$ eine Lösung mit $U_u \neq 0$, so ist durch $U(\mathbf{x}, u) = 0$ implizit eine Lösung $u = u(\mathbf{x})$ des Ausgangsproblems gegeben.

Beweis:

Gilt $U_u \neq 0$, so läßt die Funktion $U(x, u)$ nach dem Satz über implizite Funktionen nach $u(\mathbf{x})$ auflösen. Wegen $U(\mathbf{x}, u) = 0$ gilt dann

$$U_{x_i} + U_u u_{x_i} = 0$$

Ferner haben wir

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) U_{x_i} + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0$$

und daraus folgt

$$- \left(\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} \right) U_u + b(\mathbf{x}, u) U_u = 0$$

Wir erhalten also mit $U_u \neq 0$ die Differentialgleichung

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, u)$$

Beispiel: Gesucht ist die allgemeine Lösung der quasilinearen Gleichung

$$(1 + x)u_x - (1 + y)u_y = y - x$$

Das erweiterte Problem lautet dann

$$(1 + x)U_x - (1 + y)U_y + (y - x)U_u = 0$$

Das charakteristische Differentialgleichungssystem ist

$$\dot{x} = 1 + x$$

$$\dot{y} = -(1 + y)$$

$$\dot{u} = y - x$$

mit der allgemeinen Lösung

$$x(t) = c_1 e^t - 1$$

$$y(t) = c_2 e^{-t} - 1$$

$$u(t) = c_3 - c_2 e^{-t} - c_1 e^t$$

Wir verfahren wie im letzten Beispiel und lösen das charakteristische System auf:

$$e^t = \frac{x+1}{c_1} = \frac{c_2}{y+1} \Rightarrow (x+1)(y+1) = c_1 \cdot c_2 = c \in \mathbb{R}$$

und

$$u = c_3 - (x+1) - (y+1) \Rightarrow u + x + y = d \in \mathbb{R}$$

Wieder bestimmen alleine die beiden Konstanten c und d das Lösungsverhalten.

Daraus folgt die allerdings **implizite** Lösungsdarstellung

$$\Phi((x+1)(y+1), u+x+y) = 0$$

mit einer beliebigen \mathcal{C}^1 -Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Beachte: Im Gegensatz zu linearen Gleichungen erhält man bei quasilinearen Gleichungen keine explizite Lösungsdarstellung und die Lösung existiert gegebenenfalls nur lokal.

2.2 Anfangswertprobleme bei Gleichungen 1. Ordnung

Wir betrachten nun den in Anwendungen häufig auftretenden Fall einer Zeitvariablen t und n Ortsvariablen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition: Das auf ganz \mathbb{R}^n definierte Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + \sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, t, u) u_{x_i} = b(\mathbf{x}, t, u) & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

bezeichnet man als ein **Cauchy–Problem**.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist die Anfangsbedingung

$$u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x})$$

explizit vorgegeben.

Die konkreten Lösungen lassen sich dann wiederum mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens berechnen.

Ein typisches **Beispiel** ist die Transportgleichung aus Kapitel 1:

$$\begin{cases} u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0 & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

mit dem konstanten Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

Verwenden wir hier die Methode der Charakteristiken, so erhalten wir zunächst die $(n + 1)$ Differentialgleichungen

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad \frac{d\mathbf{x}}{d\tau} = \mathbf{a}$$

und wir können ohne Einschränkung $t = \tau$ annehmen.

Die Lösung der zweiten Gleichung lautet dann

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a} \cdot t,$$

mit einer Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Die charakteristischen Kurven sind also gerade Geraden, die zur Zeit $t = 0$ den Punkt \mathbf{x}_0 durchlaufen und in Richtung \mathbf{a} laufen.

Möchte man die Lösung an einem Punkt (\mathbf{x}, t) bestimmen, so sucht man zunächst die zugehörige Charakteristik, die durch diesen Punkt läuft und den Wert \mathbf{x}_0 zur Zeit $t = 0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{a}t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x} - \mathbf{a}t$$

Da die Lösung entlang der Charakteristiken konstant bleibt, folgt sofort die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}, t) = u_0(\mathbf{x} - \mathbf{a}t)$$

Interpretation dieser Lösung:

Das gegebene Anfangsprofil $u_0(\mathbf{x})$ wird mit der konstanten Geschwindigkeit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ weitertransportiert, ohne seine Form zu ändern.

Probe:

Es gilt:

$$u_t(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{a} \cdot \nabla u_0, \quad \nabla u(\mathbf{x}, t) = \nabla u_0 \quad \Rightarrow \quad u_t + \mathbf{a} \cdot \nabla u = 0$$

Beispiel: Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} u_t + txu_x = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \\ u = \sin x & \text{auf } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Die charakteristische Gleichung lautet dann

$$\dot{x} = tx, \quad x(0) = x_0$$

und besitzt die Lösung

$$x(t) = x_0 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$$

Daraus folgt die Lösungsdarstellung des Anfangswertproblems:

$$u(x, t) = \sin \left[x \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \right]$$